

N° D'ORDRE :

45.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

PAR M. H. BRYON HEYWOOD,

(B. Sc. Lend.).

1^{re} THÈSE. — SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE FREDHOLM
ET QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 mai 1908, devant la Commission d'examen.

MM. E. PICARD, *Président.*

H. POINCARÉ, *Examineurs.*

E. GOURSAT,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

N° D'ORDRE :

45.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS,

— PAR M. H. BRYON HEYWOOD,

(B. Sc. Lond.).

1^{re} THÈSE. — SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE FREDHOLM
ET QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 22 mai 1908, devant la Commission d'examen.



MM. E. PICARD, *Président.*

H. POINCARÉ,

E. GOURSAT,

{ *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL.....	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, professeur.	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES..	L. TROOST,	
	CH. WOLF.	
	RIBAN.	
	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	GIARD.....	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
PROFESSEURS	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	PELLAT.....	Physique.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignem ^t P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique Id.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	LE CHATELIER.....	Chimie.
	N.....	Chimie biologique.
	N.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	N.....	Physique.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	HADAMARD.....	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
PROFESSEURS ADJOINTS.....	DAGUILLON.....	Botanique.
	BOUVEAULT.....	Chimie organique.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	PRUVOT.....	Anatomie comparée.
	CAULLERY.....	Zoologie (évolution des êtres organisés).
SECRÉTAIRE.....	A. GUILLET.	

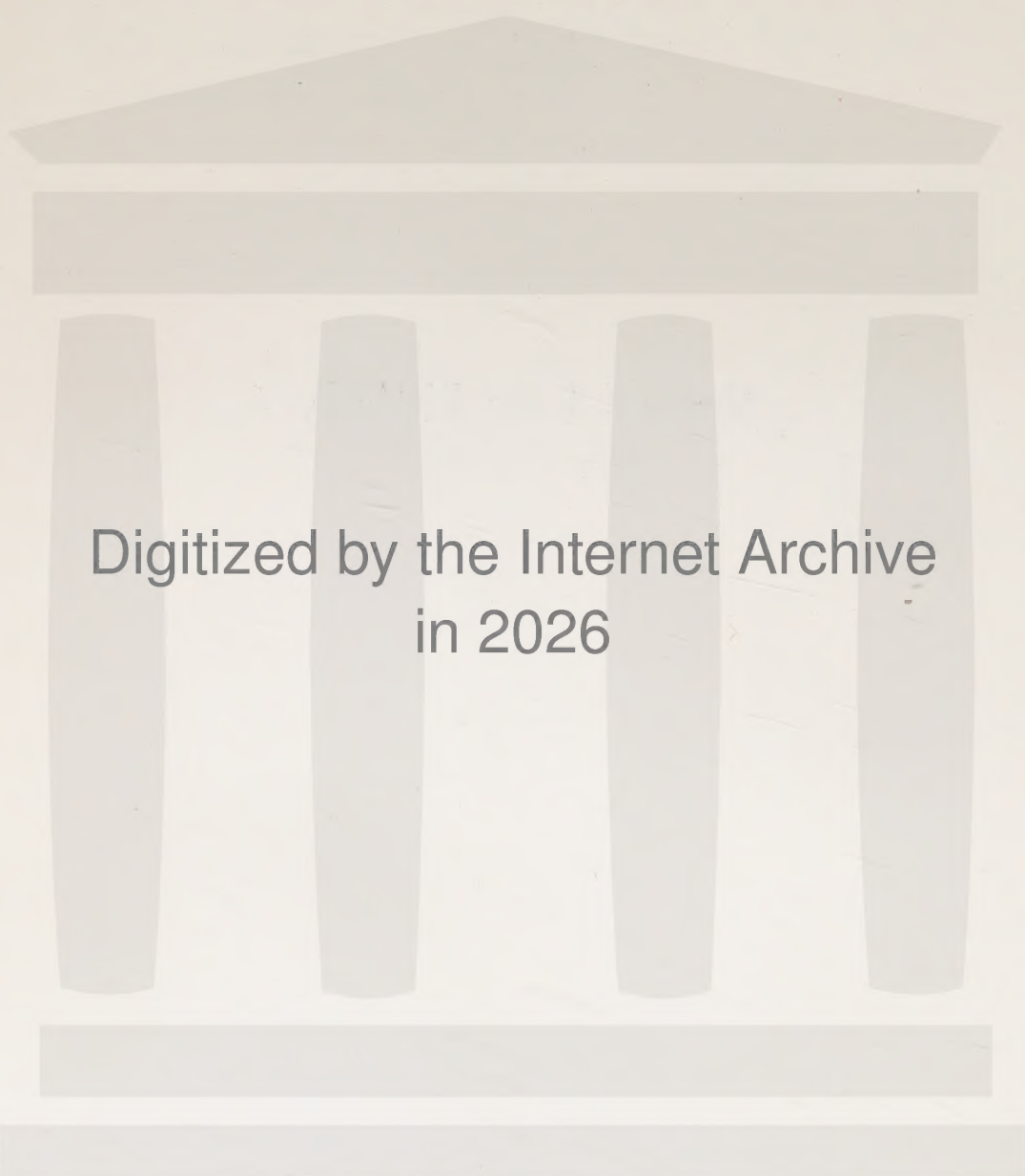
A

MONSIEUR ÉMILE PICARD,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage de respectueuse affection.

H. BRYON HEYWOOD.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554031_0070

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE FREDHOLM

ET

QUELQUES-UNES DE SES APPLICATIONS.

INTRODUCTION.

1. Il y a quelques années, M. Ivar Fredholm a donné, dans le Tome XXVII des *Acta mathematica*, la solution de l'équation

$$(1) \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s),$$

où $K(s, t)$ et $f(s)$ sont des fonctions connues, et $\varphi(s)$ est une fonction cherchée. Son travail est du plus grand intérêt, à cause des nombreuses applications de cette équation, dite maintenant *équation fonctionnelle de Fredholm*, ou *équation intégrale de seconde espèce* (Hilbert), et il a été suivi par un grand nombre de Mémoires de MM. Hilbert, Plemelj, Picard, Goursat, Stekloff, E. Schmidt et d'autres, que nous citerons plus loin.

M. Fredholm suppose d'abord que la fonction $K(s, t)$ est finie et intégrable, mais ensuite il applique ses méthodes à des fonctions qui, tout en restant intégrables, peuvent devenir infinies comme $(s - t)^{-\alpha}$ près de $s = t$, α étant un nombre positif plus petit que l'unité.

Il démontre que la solution de l'équation (1) est une fonction méro-

morphe de λ , cette solution étant le quotient d'une fonction entière de λ dépendant de s par une fonction entière de λ , $D(\lambda)$, indépendante de s . Donc une solution analytique de (1) existe (et elle est unique) toutes les fois que λ n'est pas une racine de $D(\lambda)$. Cette solution s'évanouit avec $f(s)$. Lorsque λ est une racine de $D(\lambda)$, il y a une solution, pourvu que $f(s)$ satisfasse à certaines conditions; cette solution ne sera pas unique, mais elle contiendra une ou plusieurs constantes arbitraires. Si $f(s)$ est nulle, il y aura une ou plusieurs solutions qu'on appelle *solutions fondamentales*. Au commencement du premier Chapitre nous donnons un résumé plus précis du Mémoire de M. Fredholm.

M. Hilbert a traité le cas où le *noyau* $K(s, t)$ est symétrique, par une autre méthode dépendant des propriétés des formes quadratiques à un nombre infini de variables. Il a trouvé que, pour ce cas, les pôles de la solution sont toujours simples; les solutions fondamentales, ou *fonctions fondamentales*, sont orthogonales entre elles, et l'on peut développer en série absolument et uniformément convergente de ces fonctions toute fonction s'exprimant sous la forme

$$(2) \quad g(s) = \int_a^b K(s, t) h(t) dt,$$

où $h(t)$ est finie et continue.

Il est évident que $\varphi(s) - f(s)$ a la forme (2), et que, par conséquent, cette fonction est développable comme nous l'avons expliqué.

Dans le premier Chapitre nous obtenons des résultats analogues à ceux de M. Hilbert pour le cas général, en nous appuyant sur la théorie de M. Fredholm. Les pôles en λ ne sont pas simples en général, et les solutions fondamentales n'ont plus les propriétés qu'elles ont dans le cas symétrique; mais il existe un système double de fonctions

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \dots, & \varphi_n(s), & \dots, \\ \psi_1(s), & \psi_2(s), & \dots, & \psi_n(s), & \dots, \end{array}$$

dont une paire correspond à chaque racine du déterminant $D(\lambda)$ (une racine multiple d'ordre p étant comptée comme p racines distinctes) et qui ont des propriétés très intéressantes. Le système est

biorthogonal, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_m(s) \psi_n(s) ds &= 0, & \text{si } m \neq n, \\ &= 1, & \text{si } m = n. \end{aligned}$$

Nous appelons ces fonctions *fonctions fondamentales*; elles ne coïncident avec les solutions fondamentales que dans le cas où le pôle correspondant de la solution est toujours simple. Les développements qui jouent un rôle si important dans le cas symétrique n'existent plus dans le cas général; ces développements sont considérés dans le second Chapitre avec des applications à l'équation fonctionnelle de première espèce

$$\int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s).$$

Nous étudions aussi le nombre de *constantes caractéristiques*, c'est-à-dire de racines du déterminant $D(\lambda)$, en définissant des cas où ce nombre devient infini.

2. Une des applications les plus importantes des équations de Fredholm est leur application à la théorie du potentiel. M. Poincaré avait déjà résolu les problèmes de Neumann et de Dirichlet à l'aide de séries de fonctions fondamentales, qu'il faisait correspondre à une suite infinie de constantes déterminées par la forme de la surface en question, et qu'il appelait *constantes caractéristiques*. M. Fredholm a montré que ces problèmes s'expriment par des équations fonctionnelles; ils sont ainsi résolus d'une manière très simple et très complète. MM. Plemelj et Picard ont beaucoup développé ces études; M. Picard, en particulier, a indiqué plusieurs autres applications importantes à des questions analogues en Physique mathématique. Nous donnons un résumé de ces travaux au troisième Chapitre, en faisant ressortir l'identité des résultats avec les résultats obtenus par M. Poincaré. Nous ajoutons une discussion relative aux surfaces multiconnexes, suivant les idées de M. Fredholm et de M. Picard, et une résolution du problème des marées de Lord Kelvin et de M. Poincaré pour les *ondes de longue période*, la solution étant obtenue en série absolument et uniformément convergente.

3. Dans le quatrième Chapitre nous donnons des solutions de quelques problèmes de la théorie de conductibilité. Nous nous appuyons sur les résultats des trois premiers Chapitres et nous partons des équations fonctionnelles analogues à celle donnée par M. Picard pour la vibration d'une membrane. Nous supposons que la température initiale d'un corps borné par une surface régulière est une fonction analytique, et que la température u au temps t satisfait sur la surface à une des conditions suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \text{fonction donnée,} \\ \frac{du}{dn} = \text{fonction donnée,} \\ \frac{du}{dn} - ku = \text{fonction donnée,} \end{array} \right.$$

où n représente la normale dirigée vers l'intérieur. Dans chacun de ces cas, u s'exprime en série uniformément et absolument convergente.

Nous donnons comme corollaire les solutions de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = -\lambda f(x, y, z) u,$$

où f est une fonction continue, positive, pour des conditions sur la surface analogues à (4).

4. Pendant les trois années que j'ai passées à Paris, mon travail à été dirigé et soutenu par mon maître, M. Émile Picard. Je lui adresse ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Qu'il me soit permis également de présenter mes remerciements respectueux à MM. Poincaré, Humbert et Hadamard, dont je sais apprécier les conseils et la courtoisie.

Je tiens à remercier mon ami M. Nicolini pour le concours qu'il m'a donné en m'aidant à revoir mon travail au point de vue du français.

CHAPITRE I.

THÉORIE DES FONCTIONS FONDAMENTALES RELATIVES A UNE ÉQUATION DE FREDHOLM.

§ 1. — Théorie de M. Fredholm ⁽¹⁾.

1. On appelle les deux équations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s), \\ \psi(t) - \lambda \int_a^b K(s, t) \psi(s) ds = f(t), \end{cases}$$

les *équations fonctionnelles associées de Fredholm relatives au noyau* $K(s, t)$.

Dans ces équations les fonctions $K(s, t)$, $f(s)$ sont connues, et l'on cherche à déterminer $\varphi(s)$, $\psi(t)$.

Les limites d'intégration sont fixes : elles ne seront plus désignées explicitement. Il est supposé d'abord que les fonctions $K(s, t)$, $f(s)$ sont finies et intégrables.

M. Fredholm démontre que les solutions des équations (1) dépendent d'une certaine *fonction résolvante*, $K(s, t, \lambda)$, qui satisfait aux équations

$$(2) \quad \begin{cases} -K(s, t) + K(s, t, \lambda) = \lambda \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau, \\ = \lambda \int K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t) d\tau. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier, par substitution directe et tout en supposant l'existence pour une valeur donnée de λ d'une fonction $K(s, t, \lambda)$, finie

(¹) IVAR FREDHOLM, *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, Stockholm, 1900. — *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903.

et intégrable, que les deux expressions

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s, t, \lambda) f(t) dt, \\ \psi(t) = f(t) + \lambda \int K(s, t, \lambda) f(s) ds \end{cases}$$

sont des solutions des équations (1). On vérifie de même qu'elles sont les seules solutions, en substituant dans (3) les valeurs de $f(s)$ tirées de (1).

2. M. Fredholm trouve pour la résolvante une fonction unique, méromorphe en λ ,

$$K(s, t, \lambda) = \frac{D \left(\begin{smallmatrix} s & \lambda \\ t & \end{smallmatrix} \right)}{D(\lambda)},$$

où $D \left(\begin{smallmatrix} s & \lambda \\ t & \end{smallmatrix} \right)$, $D(\lambda)$ désignent respectivement les fonctions entières

$$\begin{aligned} D \left(\begin{smallmatrix} s & \lambda \\ t & \end{smallmatrix} \right) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \int \dots \int K \left(\begin{smallmatrix} s, s_1, s_2, \dots, s_n \\ t, s_1, s_2, \dots, s_n \end{smallmatrix} \right) ds_1 ds_2 \dots ds_n, \\ D(\lambda) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \int \dots \int K \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{smallmatrix} \right) ds_1 ds_2 \dots ds_n, \end{aligned}$$

$K \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{smallmatrix} \right)$ étant le déterminant

$$\begin{vmatrix} K(s_1, t_1) & K(s_1, t_2) & \dots & K(s_1, t_n) \\ K(s_2, t_1) & K(s_2, t_2) & \dots & K(s_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(s_n, t_1) & K(s_n, t_2) & \dots & K(s_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

On appelle $D(\lambda)$ le *déterminant relatif au noyau* $K(s, t)$. Tous les pôles de $K(s, t, \lambda)$, considérée comme fonction de λ , sont des zéros de $D(\lambda)$; ils sont par conséquent indépendants de s, t . On démontre facilement que tous les zéros de $D(\lambda)$ sont des pôles de $K(s, t, \lambda)$.

la limite supérieure de $|K(s, t)|$, on aura

$$|K_n(s, t)| \leq M^n.$$

Le rayon de convergence de la série (6) est $|\lambda_1|$. On a, par conséquent,

$$|\lambda_1| \geq \frac{1}{M}.$$

5. De ce qui précède il résulte que, dans le cas où λ n'est pas égal à une constante caractéristique, chacune des deux équations (1) a une solution finie, unique, et bien déterminée. Cette solution s'évanouit lorsque $f(s) = 0$ identiquement.

Lorsque λ est égal à une constante caractéristique λ_1 , il n'y a pas en général de solutions finies des équations avec second membre. Pour qu'il y ait des solutions, il faut que la fonction $f(s)$ satisfasse à certaines conditions, comme nous le verrons plus tard. Mais, pour $\lambda = \lambda_1$, il y aura toujours des solutions des équations sans second membre

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \varphi(t) dt = 0, \\ \psi(t) - \lambda_1 \int K(s, t) \psi(s) ds = 0. \end{cases}$$

M. Fredholm écrit

$$(9) \quad \begin{cases} D_k \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_k \\ t_1, t_2, \dots, t_k \end{smallmatrix} \lambda \right) \\ = \sum_0^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \dots \int K \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+n} \\ t_1, t_2, \dots, t_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+n} \end{smallmatrix} \right) ds_{k+1} \dots ds_{k+n}. \end{cases}$$

La fonction D_k est entière en λ , les variables $s_1, s_2, \dots, s_k; t_1, t_2, \dots, t_k$ étant arbitraires.

Il démontre alors que si l'on a identiquement

$$D(\lambda_1) = 0, \quad D \left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \lambda_1 \right) = 0, \quad \dots, \quad D_{q-1} \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{q-1} \\ t_1, t_2, \dots, t_{q-1} \end{smallmatrix} \lambda_1 \right) = 0,$$

mais que

$$D_q \left(\begin{smallmatrix} s_1, s_2, \dots, s_q \\ t_1, t_2, \dots, t_q \end{smallmatrix} \lambda_1 \right) \neq 0,$$

il y a q solutions *indépendantes* de chacune des équations (8). Pour la première équation on a les q solutions

$$\Phi_k(s) = (-1)^{k-1} \frac{D_q \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s, s_{k+1}, \dots, s_q \\ t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, s_{k+1}, \dots, t_q \end{pmatrix}}{D_q \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k, t_{k+1}, \dots, s_q \\ t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_q \end{pmatrix}} \quad (k=1, 2, \dots, q).$$

Pour la seconde équation, on a

$$\Psi_k(t) = (-1)^{k-1} \frac{D_q \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \dots, s_q \\ t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t, t_{k+1}, \dots, t_q \end{pmatrix}}{D_q \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \dots, s_q \\ t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_q \end{pmatrix}} \quad (k=1, 2, \dots, q).$$

Il n'y a pas d'autres solutions indépendantes des équations (8). On appelle les $2q$ fonctions

$$\begin{aligned} \Phi_1(s), \quad \Phi_2(s), \quad \dots, \quad \Phi_q(s), \\ \Psi_1(t), \quad \Psi_2(t), \quad \dots, \quad \Psi_q(t) \end{aligned}$$

les *solutions fondamentales relatives à λ_1* .

Il y aura une solution de la première des équations avec second membre (1) pour $\lambda = \lambda_1$, pourvu que les q conditions

$$\begin{aligned} \int f(s) \Psi_1(s) ds = 0, \quad \int f(s) \Psi_2(s) ds = 0, \quad \dots, \\ \int f(s) \Psi_q(s) ds = 0 \end{aligned}$$

soient remplies. Cette solution aura pour expression

$$(9_1) \quad \varphi(s) = f(s) + \lambda \int g(s, t) f(t) dt + \sum a_k \Phi_k(s),$$

où

$$g(s, t) = \frac{D_{q+1} \begin{pmatrix} s, s_1, s_2, \dots, s_q \\ t, t_1, t_2, \dots, t_q \end{pmatrix}}{D_q \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_q \\ t_1, t_2, \dots, t_q \end{pmatrix}}.$$

Les coefficients a_k étant arbitraires, cette solution a le degré q d'indétermination.

Il y aura une solution pareille de la seconde équation dans les conditions correspondantes.

Il a été supposé que le noyau $K(s, t)$ était fini. Des travaux de MM. Fredholm, Hilbert et Plemelj il résulte qu'on peut appliquer toute la théorie précédente lorsque $K(s, t)$ devient infini, pourvu que ses singularités soient d'un ordre plus petit que l'unité.

Enfin on peut supposer que $K(s, t)$ ou que le chemin d'intégration soient complexes.

§ 2. — Combinaison de deux noyaux orthogonaux ⁽¹⁾.

4. Deux noyaux $K_1(s, t)$, $K_2(s, t)$ sont dits *orthogonaux* lorsqu'ils satisfont aux relations

$$(10) \quad \int K_1(s, \tau) K_2(\tau, t) d\tau = \int K_2(s, \tau) K_1(\tau, t) d\tau = 0.$$

Nous allons démontrer que *la résolvante de*

$$K(s, t) = K_1(s, t) + K_2(s, t)$$

est la somme des résolvantes de $K_1(s, t)$ et de $K_2(s, t)$:

$$K(s, t, \lambda) = K_1(s, t, \lambda) + K_2(s, t, \lambda).$$

Écrivons les deux formules

$$(11) \quad \begin{cases} -K_1(s, t) + K_1(s, t, \lambda) = \lambda \int K_1(s, \tau) K_1(\tau, t, \lambda) d\tau \\ \qquad \qquad \qquad = \lambda \int K_1(\tau, t) K_1(s, \tau, \lambda) d\tau, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} -K_2(s, t) + K_2(s, t, \lambda) = \lambda \int K_2(s, \tau) K_2(\tau, t, \lambda) d\tau \\ \qquad \qquad \qquad = \lambda \int K_2(\tau, t) K_2(s, \tau, \lambda) d\tau. \end{cases}$$

⁽¹⁾ M. Goursat a trouvé plusieurs des résultats démontrés dans cet article et dans le suivant. Il les a publiés dans les *Comptes rendus*, octobre et novembre 1907. J'avais, de mon côté, fait cette Communication à M. Picard à la fin du mois de juin 1907. (Voir la Note de M. Picard dans les *Comptes rendus*, au sujet de ma Communication, le 25 novembre, p. 909.)

De (11) et (12) dérivent les équations

$$\int K_2(s, \tau) K_1(\tau, t, \lambda) d\tau = \int K_2(\tau, t) K_1(s, \tau, \lambda) d\tau = 0,$$

$$\int K_1(s, \tau) K_2(\tau, t, \lambda) d\tau = \int K_1(\tau, t) K_2(s, \tau, \lambda) d\tau = 0,$$

d'où l'on obtient, en les combinant avec (11) et (12),

$$(13) \quad \begin{cases} -K_1(s, t) + K_1(s, t, \lambda) = \lambda \int K(s, \tau) K_1(\tau, t, \lambda) d\tau \\ = \lambda \int K(\tau, t) K_1(s, \tau, \lambda) d\tau, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} -K_2(s, t) + K_2(s, t, \lambda) = \lambda \int K(s, \tau) K_2(\tau, t, \lambda) d\tau \\ = \lambda \int K(\tau, t) K_2(s, \tau, \lambda) d\tau. \end{cases}$$

L'addition de (13) et (14) nous donne

$$(15) \quad \begin{cases} -[K_1(s, t) + K_2(s, t)] + [K_1(s, t, \lambda) + K_2(s, t, \lambda)] \\ = \lambda \int K(s, \tau) [K_1(\tau, t, \lambda) + K_2(\tau, t, \lambda)] d\tau \\ = \lambda \int K(\tau, t) [K_1(s, \tau, \lambda) + K_2(s, \tau, \lambda)] d\tau, \end{cases}$$

équations qui déterminent la somme $K_1(s, t, \lambda) + K_2(s, t, \lambda)$.

Or, $K(s, t, \lambda)$ est déterminé par les équations

$$\begin{aligned} -K(s, t) + K(s, t, \lambda) &= \lambda \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau \\ &= \lambda \int K(\tau, t) K(s, \tau, \lambda) d\tau, \end{aligned}$$

qui sont identiques à (15).

Puisque ces équations ont une solution unique, il faut que nous ayons

$$K(s, t, \lambda) = K_1(s, t, \lambda) + K_2(s, t, \lambda).$$

3. *Le déterminant de $K(s, t)$ est le produit des déterminants de $K_1(s, t)$ et de $K_2(s, t)$.*

Pour le démontrer, revenons à l'équation (4); elle nous donne

$$(16) \quad \int K(s, s, \lambda) ds = -\frac{1}{D(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} D(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} [\log D(\lambda)].$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [\log D(\lambda)] &= -\int K(s, s, \lambda) d\lambda \\ &= -\int [K_1(s, s, \lambda) + K_2(s, s, \lambda)] d\lambda \\ &= \frac{d}{d\lambda} [\log D_1(\lambda) + \log D_2(\lambda)] \\ &= \frac{d}{d\lambda} \{\log [D_1(\lambda) \times D_2(\lambda)]\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$D(\lambda) = C \times D_1(\lambda) \times D_2(\lambda).$$

Pour achever, il faut démontrer que la constante C est égale à l'unité. Il suffit de faire $\lambda = 0$:

$$D(0) = 1 = D_1(0) \times D_2(0).$$

Donc

$$(17) \quad D(\lambda) = D_1(\lambda) \times D_2(\lambda).$$

6. De la dernière proposition il résulte que, si λ_1 est une constante caractéristique de $K(s, t)$, elle sera aussi une constante caractéristique ou de $K_1(s, t)$ ou de $K_2(s, t)$, ou de $K_1(s, t)$ et de $K_2(s, t)$. Prenons la dernière hypothèse qui renferme les autres comme cas particuliers.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante :

Les solutions de l'équation

$$(18) \quad \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t) \varphi_1(t) dt = 0$$

et les solutions de l'équation

$$(19) \quad \varphi_2(s) - \lambda_1 \int K_2(s, t) \varphi_2(t) dt = 0$$

sont aussi des solutions de

$$(20) \quad \varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \varphi(t) dt = 0.$$

Les solutions de (20) sont des fonctions linéaires des solutions de (18) et de (19).

Nous multiplions l'équation (18) par $K_2(r, s)$ et nous intégrons :

$$\int K_2(r, s) \overline{\varphi_1(s)} ds = \lambda_1 \int \int K_2(r, s) K_1(s, t) \varphi_1(t) ds dt = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \varphi_1(t) dt \\ = \varphi_1(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t) \varphi_1(t) dt - \lambda_1 \int K_2(s, t) \varphi_1(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi_1(s)$ est une solution de l'équation (20). De même $\varphi_2(s)$ est aussi une solution de (20).

Maintenant, soit $\varphi(s)$ une solution quelconque de (20).

Mettons

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda_1 \int K_1(s, t) \varphi(t) dt = \varphi'_1(s), \\ \varphi(s) = \varphi'_1(s) + \varphi'_2(s). \end{cases}$$

Je vais démontrer que $\varphi'_1(s)$, $\varphi'_2(s)$ sont des solutions de (18) et de (19) respectivement.

Des équations (20) et (21) on tire

$$(22) \quad \varphi'_2(s) = \lambda_1 \int K_2(s, t) \varphi(t) dt,$$

d'où il résulte

$$\int K_1(s, t) \varphi'_2(t) dt = \lambda_1 \int \int K_1(s, t) K_2(t, \tau) \varphi(\tau) dt d\tau = 0,$$

et, d'après (21),

$$\varphi_1'(s) - \lambda_1 \int K_1(s, t) \varphi_1'(t) dt = \lambda_1 \int K_1(s, t) \varphi_2'(t) dt = 0,$$

c'est-à-dire que $\varphi_1'(s)$ est une solution de (18).

De la même manière, en nous servant de (22), nous pouvons démontrer que $\varphi_2'(s)$ est une solution de (19).

Il est facile de voir que les solutions des équations avec seconds membres

$$\varphi(s) - \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt = f(s),$$

$$\varphi_1(s) - \lambda \int K_1(s, t) \varphi_1(t) dt = f(s),$$

$$\varphi_2(s) - \lambda \int K_2(s, t) \varphi_2(t) dt = f(s)$$

satisfont à la relation

$$\varphi(s) + f(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s).$$

§ 3. — Partie du noyau relative à une constante caractéristique.

7. Nous allons d'abord étudier *la continuité de la résolvante* $K(s, t, \lambda)$. Supposons que $K(s, t)$ soit une fonction finie et continue de s, t ; $K(s, t, \lambda)$ sera aussi une fonction finie et continue de s, t pour toute valeur régulière de λ .

Nous remarquons que, si $K(s, t, \lambda)$ a des discontinuités autres que ses pôles en λ , ces discontinuités sont indépendantes de λ . Donc il suffira de démontrer que $K(s, t, \lambda)$ est continu en s, t lorsque $|\lambda| < \frac{1}{M}$, M étant la limite supérieure de $|K(s, t)|$. Nous avons vu (§ 1) que $\frac{1}{M}$ était au plus égal au module de la première constante caractéristique.

Donc la série

$$(23) \quad K(s, t, \lambda) = K_1(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(s, t) + r_n(s, t, \lambda)$$

est uniformément convergente. Nous pouvons toujours trouver le

nombre entier n_0 , tel que lorsque $n \geq n_0$ nous aurons

$$|r_n(s, t, \lambda)| \leq \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut, et indépendant de s, t .

Le noyau $K(s, t)$ étant continu, nous pouvons trouver h tel que

$$|K(s+h, t) - K(s, t)| < \varepsilon.$$

Le noyau réitéré $K_n(s, t)$ est continu aussi, et satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned} & |K_n(s+h, t) - K_n(s, t)| \\ &= \left| \int [K(s+h, t) - K(s, t)] K_{n-1}(\tau, t) d\tau \right| \leq M^{n-1} \varepsilon, \end{aligned}$$

puisque $|K_n| \leq M^n$, d'après le § 1

Donc nous avons

$$\begin{aligned} & |K(s+h, t, \lambda) - K(s, t, \lambda)| \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} [K_k(s+h, t) - K_k(s, t)] \right| + |r_n(s+h, t, \lambda) - r_n(s, t, \lambda)| \\ & \leq \sum_{k=1}^n |\lambda^{k-1}| M^{k-1} \varepsilon + 2\varepsilon \\ & \leq \varepsilon \left(2 + \frac{1}{1 - |\lambda| M} \right), \end{aligned}$$

puisque $|\lambda| M < 1$.

Il en résulte que $K(s, t, \lambda)$ est une fonction continue de s quelle que soit la valeur de t . On démontre de la même manière que $K(s, t, \lambda)$ est une fonction continue de t quelle que soit la valeur de s .

Les noyaux discontinus auxquels on a jusqu'ici appliqué la théorie de Fredholm sont tels qu'à partir d'un certain noyau réitéré $K(s, t)$ tous les noyaux réitérés sont finis. Dans ces conditions l'étude précédente nous permet d'affirmer que *la résolvante $K(s, t, \lambda)$ ne peut avoir de discontinuités que pour les valeurs de s, t qui rendent $K(s, t)$ discontinu*, où l'on suppose toujours que λ ait une valeur régu-

lière. Ceci résulte de ce que les noyaux réitérés sont discontinus seulement pour les valeurs de s, t qui rendent $K(s, t)$ discontinu.

8. Soit λ_1 une constante caractéristique quelconque du noyau $K(s, t)$. Si les lettres p, q, r représentent respectivement la multiplicité du zéro λ_1 , du déterminant $D(\lambda)$, le nombre de solutions fondamentales relatives à λ_1 , et la multiplicité du pôle λ_1 de la résolvante $K(s, t, \lambda)$, je peux démontrer l'inégalité suivante :

$$(24) \quad r + q \leq p + 1.$$

Les conditions du § 1 nous donnent

$$D_1 \begin{pmatrix} s_1 \lambda_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = 0, \quad D_2 \begin{pmatrix} s_1, s_2, \lambda_1 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \dots, \quad D_{q-1} \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{q-1} \lambda_1 \\ t_1, t_2, \dots, t_{q-1} \end{pmatrix} = 0,$$

$$D_q \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{q-1}, s_q \lambda_1 \\ t_1, t_2, \dots, t_{q-1}, t_q \end{pmatrix} \neq 0.$$

Soient $p_1, p_2, \dots, p_{q-1}, p_q (= 0)$ les degrés de multiplicité du zéro λ_1 pour ces fonctions $D_1, D_2, \dots, D_{q-1}, D_q$ respectivement.

Nous avons $r = p - p_1$.

On obtient facilement les formules suivantes analogues à (4) :

$$\int D_1 \begin{pmatrix} s \lambda \\ s \end{pmatrix} ds = - \frac{d}{d\lambda} D_0(\lambda),$$

$$\int D_2 \begin{pmatrix} s, s_1 \lambda \\ s, t_1 \end{pmatrix} ds = - \frac{d}{d\lambda} D_1 \begin{pmatrix} s_1 \lambda \\ t_1 \end{pmatrix},$$

$$\dots, \dots, \dots,$$

$$\int D_{q-1} \begin{pmatrix} s, s_1, \dots, s_{q-2} \lambda \\ s, t_1, \dots, t_{q-2} \end{pmatrix} ds = - \frac{d}{d\lambda} D_{q-2} \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_{q-2} \lambda \\ t_1, t_2, \dots, t_{q-2} \end{pmatrix}.$$

De ces formules résultent les inégalités

$$p - 1 \geq p_1, \quad p_1 - 1 \geq p_2, \quad \dots, \quad p_{q-2} - 1 \geq p_{q-1},$$

c'est-à-dire

$$p \geq p_1 + 1 \geq p_2 + 2 \geq \dots \geq p_{q-2} + q - 2 \geq p_{q-1} + q - 1 \geq q.$$

Donc on a

$$p_1 + 1 \geq q,$$

et, par conséquent,

$$r + q \leq p + 1.$$

9. Dans le voisinage du pôle λ_1 nous pouvons écrire $K(s, t, \lambda)$ sous la forme

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} K(s, t, \lambda) &= \frac{\varphi_r(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^{r-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)} + \varphi_0(s, t, \lambda) \\ &= \chi(s, t, \lambda) + \varphi_0(s, t, \lambda). \end{aligned} \right.$$

Nous appelons $\chi(s, t, \lambda)$ la partie de la résolvante relative à la constante caractéristique λ_1 ; nous appelons la fonction

$$(27) \quad \chi(s, t) = \chi(s, t, 0) = \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1^r} + \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{\lambda_1^{r-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1}$$

la partie du noyau $K(s, t)$ relative à λ_1 .

Si $K(s, t)$ est continu, les fonctions $\varphi_1(s, t)$, $\varphi_2(s, t)$, ..., $\varphi_r(s, t)$ seront également continues. Pour le démontrer traçons dans le plan des λ un contour C , qui renferme λ_1 , mais qui ne renferme pas d'autres constantes caractéristiques. Nous aurons

$$(28) \quad \varphi_v(s, t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_C (\lambda_1 - \lambda)^{v-1} K(s, t, \lambda) d\lambda.$$

La résolvante $K(s, t, \lambda)$ étant continue sur le contour, il faut que $\varphi_v(s, t)$ soit continu. En général, lorsque $K(s, t)$ a des discontinuités, $\varphi_v(s, t)$ ne peut avoir de discontinuités que pour les mêmes valeurs de s, t .

10. Rappelons maintenant la formule (16) :

$$(16) \quad \int K(s, s, \lambda) ds = - \frac{d}{d\lambda} [\log D(\lambda)].$$

Puisque λ_1 est un zéro de $D(\lambda)$ d'ordre p , nous avons

$$D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^p D'(\lambda),$$

H.

où

$$D'(\lambda_i) \neq 0.$$

Donc

$$\frac{d}{d\lambda} [\log D(\lambda)] = -\frac{p}{\lambda_i - \lambda} + \frac{d}{d\lambda} [\log D'(\lambda)].$$

L'expression $\frac{d}{d\lambda} [\log D'(\lambda)]$ reste finie lorsque λ tend vers λ_i , et nous tirons de (16) l'équation

$$(29) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i} (\lambda_i - \lambda) \int K(s, s, \lambda) ds = +p.$$

De (26) et (29) il résulte que

$$(30) \quad \begin{cases} \int \varphi_r(s, s) ds = 0, & \int \varphi_{r-1}(s, s) ds = 0, & \dots, \\ \int \varphi_2(s, s) ds = 0, & \int \varphi_1(s, s) ds = p. \end{cases}$$

II. Nous écrivons maintenant les équations (2) sous la forme suivante :

$$(31) \quad \begin{cases} -K(s, t) + K(s, t, \lambda) \\ = (\lambda - \lambda_i) \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau + \lambda_i \int K(s, \tau) K(\tau, t, \lambda) d\tau \\ = (\lambda - \lambda_i) \int K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t) d\tau + \lambda_i \int K(s, \tau, \lambda) K(\tau, t) d\tau. \end{cases}$$

Si nous substituons ensuite l'expression de $K(s, t, \lambda)$ tirée de (26) dans les équations (31), nous aurons le droit d'égaliser les coefficients de $(\lambda_i - \lambda)^{-1}$, $(\lambda_i - \lambda)^{-2}$, ..., $(\lambda_i - \lambda)^{-r}$ dans les trois membres. Ceci nous donne

$$(32) \quad \varphi_r(s, t) = \lambda_i \int K(s, \tau) \varphi_r(\tau, t) d\tau = \lambda_i \int K(\tau, t) \varphi_r(s, \tau) d\tau,$$

$$(33) \quad \begin{cases} \varphi_{r-1}(s, t) = \lambda_i \int K(s, \tau) \varphi_{r-1}(\tau, t) d\tau - \int K(s, \tau) \varphi_r(\tau, t) d\tau \\ = \lambda_i \int K(\tau, t) \varphi_{r-1}(s, \tau) d\tau - \int K(\tau, t) \varphi_r(s, \tau) d\tau, \\ \dots \end{cases}$$

et

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(s, t) &= \lambda_1 \int K(s, \tau) \varphi_1(\tau, t) d\tau - \int K(s, \tau) \varphi_2(\tau, t) d\tau \\ &= \lambda_1 \int K(\tau, t) \varphi_1(s, \tau) d\tau - \int K(\tau, t) \varphi_2(s, \tau) d\tau, \end{aligned} \right.$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_0(s, t, \lambda) - K(s, t) \\ &= \lambda \int K(s, \tau) \varphi_0(\tau, t, \lambda) d\tau - \int K(s, \tau) \varphi_1(\tau, t) d\tau \\ &= \lambda \int K(\tau, t) \varphi_0(s, \tau, \lambda) d\tau - \int K(\tau, t) \varphi_1(s, \tau) d\tau. \end{aligned} \right.$$

On transforme ces équations aux formes suivantes :

$$(36) \quad \int K(s, \tau) \varphi_r(\tau, t) d\tau = \int K(\tau, t) \varphi_r(s, \tau) d\tau = \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1},$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \int K(s, \tau) \varphi_{r-1}(\tau, t) d\tau &= \int K(\tau, t) \varphi_{r-1}(s, \tau) d\tau \\ &= \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1^2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \int K(s, \tau) \varphi_1(\tau, t) d\tau &= \int K(\tau, t) \varphi_1(s, \tau) d\tau \\ &= \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s, t)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1^r} \\ &= \chi(s, t), \end{aligned} \right.$$

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda \int K(s, \tau) \varphi_0(\tau, t, \lambda) d\tau &= \lambda \int K(\tau, t) \varphi_0(s, t, \lambda) d\tau \\ &= -K(s, t) + \varphi_0(s, t, \lambda) \\ &\quad + \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1^r} \\ &= \varphi_0(s, t, \lambda) - \varphi_0(s, t, 0). \end{aligned} \right.$$

On multiplie ensuite l'équation (2) du § 1 par $\varphi_r(t, r)$ et on l'intègre par rapport à t . En se servant de (36) on a, après un léger changement de notation,

$$(40) \quad \int K(s, \tau, \lambda) \varphi_r(\tau, t) d\tau = \int K(\tau, t, \lambda) \varphi_r(s, \tau) d\tau = \frac{\varphi_r(s, t)}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Et de la même manière on obtient les autres équations

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \int K(s, \tau, \lambda) \varphi_{r-1}(\tau, t) d\tau &= \int K(\tau, t, \lambda) \varphi_{r-1}(s, \tau) d\tau \\ &= \frac{\varphi_{r-1}(s, t)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_r(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} \int K(s, \tau, \lambda) \varphi_1(\tau, t) d\tau &= \int K(\tau, t, \lambda) \varphi_1(s, \tau) d\tau \\ &= \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^2} + \dots + \frac{\varphi_r(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^r} \\ &= \chi(s, t, \lambda). \end{aligned} \right.$$

On se sert de nouveau de l'équation (26) pour séparer dans les équations (40), (41), (42) les coefficients de $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda}$, $\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda)^2}$, ..., $\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda)^r}$, et l'on obtient ainsi une série d'équations qui se résument sous la forme suivante :

$$(43) \quad \begin{aligned} \int \varphi_m(s, \tau) \varphi_n(\tau, t) d\tau &= \int \varphi_n(s, \tau) \varphi_m(\tau, t) d\tau = 0 \\ &\text{si } m + n > r + 1, \\ &= \varphi_{m+n-1}(s, t), \\ &\text{si } m + n \leq r + 1, \end{aligned}$$

$$(44) \quad \int \varphi_m(s, \tau) \varphi_0(\tau, t, \lambda) d\tau = \int \varphi_0(s, \tau, \lambda) \varphi_m(\tau, t) d\tau = 0, \\ \text{pour toute valeur de } m.$$

II. A l'aide de (11) on peut démontrer que les deux parties de

$$K(s, t) = \chi_0(s, t) + \varphi_0(s, t, 0)$$

sont orthogonales. On a, pour toute valeur régulière de λ, μ ,

$$(44a) \quad \int \chi(s, \tau, \lambda) \varphi_0(\tau, t, \mu) d\tau = \int \varphi_0(s, \tau, \mu) \chi(\tau, t, \lambda) d\tau = 0.$$

Faisant $\lambda = 0, \mu = \lambda$, nous avons, d'après (39),

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} -\varphi_0(s, t, 0) + \varphi_0(s, t, \lambda) &= \lambda \int \varphi_0(s, \tau, 0) \varphi_0(\tau, t, \lambda) d\tau \\ &= \lambda \int \varphi_0(\tau, t, 0) \varphi_0(s, \tau, \lambda) d\tau, \end{aligned} \right.$$

et, d'après (2),

$$(46) \quad \begin{cases} -\chi(s, t) + \chi(s, t, \lambda) = \lambda \int \chi(s, \tau) \chi(\tau, t, \lambda) d\tau \\ \quad \quad \quad = \lambda \int \chi(\tau, t) \chi(s, \tau, \lambda) d\tau. \end{cases}$$

On peut donc dire que les fonctions $\varphi_0(s, t, 0)$ et $\chi(s, t)$ sont orthogonales et ont respectivement pour résolvantes des fonctions $\varphi_0(s, t, \lambda)$, $\chi(s, t, \lambda)$. Il résulte que nous pouvons appliquer les considérations du § 2, et ~~que nous~~ *pouvons considérer à part la partie $\chi(s, t)$ du noyau $K(s, t)$ relative à λ_1 .*

Le déterminant de $\chi(s, t)$ est donné par

$$\frac{d}{d\lambda} [\log D'(\lambda)] = - \int \chi(s, s, \lambda) ds = \frac{-p}{\lambda_1 - \lambda} = \frac{p}{\lambda - \lambda_1}.$$

Par conséquent,

$$D'(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^p \times \text{const.}$$

Mais

$$D'(0) = 1,$$

et l'on a

$$(47) \quad D'(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^p.$$

C'est le facteur du déterminant $D(\lambda)$ de $K(s, t)$ relatif à la partie $\chi(s, t)$.

On peut démontrer que les parties du noyau relatives à deux constantes caractéristiques sont orthogonales.

Soient $\chi_1(s, t)$, $\chi_2(s, t)$ les parties du noyau $K(s, t)$ relatives à λ_1 , λ_2 ; soient $\chi_1(s, t, \lambda)$, $\chi_2(s, t, \lambda)$ les parties correspondantes de la résolvante. On a

$$K(s, t, \lambda) = \chi_1(s, t, \lambda) + \chi_2(s, t, \lambda) + \varphi'_0(s, t, \lambda),$$

et, en appliquant les formules (44),

$$\begin{aligned} & \int \chi_1(s, \tau) [\chi_2(\tau, t, \lambda) + \varphi'_0(\tau, t, \lambda)] d\tau \\ &= \int \chi_1(\tau, t) [\chi_2(s, \tau, \lambda) + \varphi'_0(s, \tau, \lambda)] d\tau = 0. \end{aligned}$$

La fonction $\varphi'_0(s, t, \lambda)$ reste finie lorsque λ s'approche de λ_2 ; donc, en se souvenant de la forme de $\chi_2(s, t, \lambda)$, on aura

$$\int \chi_1(s, \tau) \chi_2(\tau, t, \lambda) d\tau = \int \chi_1(\tau, t) \chi_2(s, \tau, \lambda) d\tau = 0.$$

Faisant $\lambda = 0$,

$$(47_1) \quad \int \chi_1(s, \tau) \chi_2(\tau, t) d\tau = \int \chi_1(\tau, t) \chi_2(s, \tau) d\tau = 0.$$

Nous avons donc démontré que $\chi_1(s, t)$, $\chi_2(s, t)$ sont orthogonales.

§ 4. — Fonctions fondamentales.

12. Envisageons maintenant la fonction $\varphi_r(s, t)$. L'équation (32) indique qu'elle est une solution de chacune des équations associées de Fredholm sans second membre pour $\lambda = \lambda_1$. Donc, considérée comme une fonction de s , $\varphi_r(s, t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. De même, considérée comme une fonction de t , $\varphi_r(s, t)$ est la somme de q fonctions indépendantes au plus. Nous pouvons écrire $\varphi_r(s, t)$ sous la forme

$$\varphi_r(s, t) = \sum_{k=1}^q \xi_k(s) \eta_k(t).$$

D'après l'équation (33) on voit que $\varphi_{r-1}(s, t)$ est une solution de chacune de deux équations associées de Fredholm, avec second membre, pour $\lambda = \lambda_1$. Les conditions du § 1 pour l'existence des solutions sont nécessairement remplies, d'après (48). La forme des équations (9₁) démontre que $\varphi_{r-1}(s, t)$ est aussi la somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_{r-1}(s, t) = \sum_{k=1}^{2q} \xi'_k(s) \eta'_k(t).$$

Nous examinons de proche en proche toutes les fonctions $\varphi_{r-2}(s, t)$, $\varphi_{r-3}(s, t)$, ..., $\varphi_1(s, t)$, et nous trouvons enfin que $\varphi_1(s, t)$ est aussi la

somme d'un nombre fini de produits :

$$\varphi_i(s, t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(s) \psi_k(t).$$

Nous substituons cette expression dans une des équations (43) :

$$\int \varphi_i(s, \tau) \varphi_i(\tau, t) d\tau = \varphi_i(s, t).$$

Il en résulte

$$\sum_k \sum_j \varphi_k(s) \psi_j(t) \int \varphi_j(\tau) \psi_k(\tau) d\tau = \sum_k \varphi_k(s) \psi_k(t).$$

Nous supposons que les fonctions $\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s)$ sont indépendantes, et que les fonctions $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ sont aussi indépendantes. Dans ces conditions nous égalons les coefficients de $\varphi_k(s) \psi_j(t)$ dans les deux membres. Ceci nous donne les relations

$$(48) \quad \begin{cases} \int \varphi_k(s) \psi_j(s) ds = 0 & \text{si } k \neq j, \\ & = 1 & \text{si } k = j, \\ \int \varphi_i(s, s) ds = n. \end{cases}$$

Rappelons une des équations (30),

$$\int \varphi_i(s, s) ds = p,$$

où p est le degré du zéro λ_i de $D(\lambda)$.

Nous avons $n = p$,

$$(48_i) \quad \varphi_i(s, t) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(s) \psi_k(t);$$

nous appelons les $2p$ fonctions

$$(49) \quad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \dots, & \varphi_p(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \dots, & \psi_p(t) \end{cases}$$

fonctions fondamentales relatives à λ_i .

cients $a_{11}, a_{12}, \dots$ satisfassent à certaines conditions, à savoir :

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{ik} a_{ik} a_{ki} = 0, \\ \sum_{ijk} a_{ij} a_{jk} a_{ki} = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \sum_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{r-1} i_1} = 0. \end{array} \right.$$

On aura aussi, dans les cas où $r < p$, à admettre que tous les coefficients de $\varphi_{r+1}(s, t)$ sont nuls.

14. D'autre part, si nous choisissons $2p$ fonctions $\varphi_1(s), \dots, \varphi_p(s), \psi_1(t), \dots, \psi_p(t)$ et p^2 coefficients $a_{11}, \dots, a_{pp}$ qui satisfont aux conditions précédentes, nous pouvons construire un noyau auquel toute la théorie s'appliquera. Les coefficients ont un haut degré d'indétermination; en particulier, nous pouvons associer à chaque a_{jk} un même facteur indéterminé μ .

Écrivons $\chi(s, t)$ sous la forme

$$\chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{jk}^{1,p} a_{jk} \varphi_j(s) \psi_k(t).$$

Je dis que les coefficients de $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_p(s)$ sont des fonctions de t linéairement indépendantes. S'il n'en était pas ainsi, il serait possible d'écrire

$$(54) \quad \chi(s, t) = \sum_{k=1}^{p-1} \varphi'_k(s) \psi'_k(t)$$

en somme de $p - 1$ produits. Il est facile de voir que le déterminant du noyau (54) est de degré $p - 1$ au plus. En effet, le coefficient de λ^p dans $D(\lambda)$ est l'intégrale du déterminant

$$\chi \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \chi(s_1, s_1) & \chi(s_1, s_2) & \dots & \chi(s_1, s_p) \\ \chi(s_2, s_1) & \chi(s_2, s_2) & \dots & \chi(s_2, s_p) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \chi(s_p, s_1) & \chi(s_p, s_2) & \dots & \chi(s_p, s_p) \end{vmatrix},$$

H.

que l'une des fonctions $\psi_1(t), \dots, \psi_p(t)$ ait une discontinuité à $t = t_0$, à cause de l'équation (48₁). Mais, si $\varphi_0(s)$ est discontinue pour $s = s_0$, la fonction $\varphi_1(s, t)$, et par conséquent le noyau $K(s, t)$, sera discontinue pour $s = s_0$, quel que soit t . Il en résulte le théorème suivant :

Toutes les fonctions fondamentales $\varphi_0(s)$ seront continues au point $s = s_0$, à moins que le noyau $K(s, t)$ ne soit discontinu pour $s = s_0$ indépendamment de t .

En particulier, l'ensemble des noyaux qui deviennent infinis de la même façon que $(s - t)^{-\alpha}$, où $\alpha < 1$, lorsque s tend vers t , mais qui sont ailleurs continus, ont toutes leurs fonctions fondamentales finies et continues.

16. Dans le cas où $K(s, t)$ et λ_1 sont réels, nous pouvons toujours supposer que les fonctions fondamentales sont réelles. En effet, si nous avons la paire complexe

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \varphi'(s) + i\varphi''(s), \\ \psi_1(t) &= \psi'(t) + i\psi''(t),\end{aligned}$$

nous aurions la paire conjuguée

$$\begin{aligned}\varphi_2(s) &= \varphi'(s) - i\varphi''(s), \\ \psi_2(t) &= \psi'(t) - i\psi''(t),\end{aligned}$$

et il est facile de voir que nous pourrions remplacer le système complexe

$$\begin{array}{cc}\varphi_1(s), & \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), & \psi_2(t)\end{array}$$

par le système réel

$$\begin{array}{cc}2\varphi'(s), & -2\varphi''(s), \\ \psi'(t), & \psi''(t),\end{array}$$

qui remplit les conditions suffisantes.

17. Nous avons vu que les fonctions fondamentales relatives à une constante caractéristique formaient un système biorthogonal. Nous allons démontrer maintenant que *les fonctions fondamentales relatives à l'ensemble des constantes caractéristiques forment un même système biorthogonal.*

Soient λ_1, λ_2 deux constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$; $\chi_1(s, t), \chi_2(s, t)$, les parties de $K(s, t)$ relatives à λ_1, λ_2 , sont orthogonales. Il en résulte que

$$\int \chi_1(s, t, \lambda) \chi_2(\tau, t, \mu) d\tau = 0.$$

Séparons le coefficient de $(\lambda_1 - \lambda)^{-1} (\lambda_2 - \mu)^{-1}$ qui est identiquement nul :

$$\int \left[\sum_{k=1}^{p_1} \varphi_k^{(1)}(s) \psi_k^{(1)}(\tau) \right] \left[\sum_{j=1}^{p_2} \varphi_j^{(2)}(\tau) \psi_j^{(2)}(t) \right] d\tau.$$

A cause de l'indépendance des fonctions $\varphi^{(1)}(s)$ et des fonctions $\psi^{(2)}(t)$, on a

$$\int \psi_k^{(1)}(\tau) \varphi_j^{(2)}(\tau) d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p_1); (j = 1, 2, \dots, p_2).$$

De même on a

$$\int \psi_j^{(2)}(\tau) \varphi_k^{(1)}(\tau) d\tau = 0.$$

Donc les fonctions fondamentales relatives aux deux constantes caractéristiques λ_1, λ_2 forment un même système biorthogonal, et la généralisation énoncée ci-dessus en résulte immédiatement.

18. Nous considérons maintenant les solutions des équations sans seconds membres

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int K(s, t) \varphi(t) dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda_1 \int K(s, t) \psi(s) ds = 0.$$

D'après ce qui a été démontré dans le § 2, on voit que les solutions

seront les mêmes que celles de

$$\varphi(s) - \lambda_1 \int \chi(s, t) \varphi(t) dt = 0,$$

$$\psi(t) - \lambda_1 \int \chi(s, t) \psi(s) ds = 0.$$

Elles seront donc des fonctions linéaires homogènes des fonctions fondamentales

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \sum_{k=1}^p \beta_k \varphi_k(s), \\ \psi(t) &= \sum_{k=1}^p \gamma_k \psi_k(t). \end{aligned}$$

Ces fonctions seront, en général, en plus petit nombre que les fonctions fondamentales; dans le cas seulement où $r=1$, il y a coïncidence entre les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales; cette catégorie renferme les noyaux symétriques (*voir* Chap. II, § 2).

19. Remarquons enfin que nous aurons plusieurs développements en série intéressants, *dans le cas où ces séries sont uniformément convergentes.*

Le noyau $K(s, t)$ et la résolvante se développent suivant leurs parties :

$$\begin{aligned} K(s, t) &= K_0(s, t) + \chi_1(s, t) + \chi_2(s, t) + \dots, \\ K(s, t, \lambda) &= K_0(s, t, \lambda) + \chi_1(s, t, \lambda) + \chi_2(s, t, \lambda) + \dots, \end{aligned}$$

où $K_0(s, t)$ est un noyau sans constante fondamentale et $K_0(s, t, \lambda)$ est sa résolvante.

Les solutions des deux équations associées se développent suivant les fonctions fondamentales

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= f(s) + a_1 \varphi_1(s) + a_2 \varphi_2(s) + \dots, \\ \psi(t) &= f(t) + b_1 \psi_1(t) + b_2 \psi_2(t) + \dots \end{aligned}$$

20. Pour compléter ce Chapitre nous allons donner un exemple

d'un noyau dont la résolvante a un pôle double. Un noyau avec le système biorthogonal

$$\begin{aligned} \varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), \quad \psi_2(t) \end{aligned}$$

et la seule constante caractéristique λ_1 aura la forme

$$\begin{aligned} \chi(s, t) &= \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(s, t) + \frac{1}{\lambda_1} \varphi_2(s, t) \\ &= \frac{1}{\lambda_1} [\varphi_1(s) \psi_1(t) + \varphi_2(s) \psi_2(t)] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_1^2} [a_{11} \varphi_1(s) \psi_1(t) + a_{12} \varphi_1(s) \psi_2(t) \\ &\quad + a_{21} \varphi_2(s) \psi_1(t) + a_{22} \varphi_2(s) \psi_2(t)] \end{aligned}$$

(où nous avons omis un terme qui représenterait une partie du noyau sans constante caractéristique). Pourvu que le second terme ne s'évanouisse pas identiquement, il y aura une seule solution de chacune des équations sans seconds membres, à cause de la relation

$$r + q \leq p + 1.$$

Les coefficients a doivent satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= 0, \\ a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Faisons

$$a_{11} = \alpha\beta, \quad a_{12} = -\alpha,$$

on trouve

$$a_{22} = -\alpha\beta, \quad a_{21} = \alpha\beta^2;$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_2(s, t) &= \alpha\beta \varphi_1(s) \psi_1(t) - \alpha \varphi_1(s) \psi_2(t) \\ &\quad + \alpha\beta^2 \varphi_2(s) \psi_1(t) - \alpha\beta \varphi_2(s) \psi_2(t) \\ &= \alpha [\varphi_1(s) + \beta \varphi_2(s)] [\beta \psi_1(t) - \psi_2(t)], \end{aligned}$$

les constantes α, β ayant des valeurs quelconques.

Nous pouvons dire maintenant que le noyau

$$\begin{aligned}\chi(s, t) = & \frac{1}{\lambda_1} [\varphi_1(s) \psi_1(t) + \varphi_2(s) \psi_2(t)] \\ & + \frac{\alpha}{\lambda_1^2} [\varphi_1(s) + \beta \varphi_2(s)] [\beta \psi_1(t) - \psi_2(t)]\end{aligned}$$

a la résolvante

$$\begin{aligned}\chi(s, t, \lambda) = & \frac{1}{\lambda_1 - \lambda} [\varphi_1(s) \psi_1(t) + \varphi_2(s) \psi_2(t)] \\ & + \frac{\alpha}{(\lambda_1 - \lambda)^2} [\varphi_1(s) + \beta \varphi_2(s)] [\beta \psi_1(t) - \psi_2(t)]\end{aligned}$$

et les solutions fondamentales

$$\varphi_1(s) + \beta \varphi_2(s), \quad \beta \psi_1(t) - \psi_2(t).$$

Si $\alpha = 0$, il y aura deux paires de solutions fondamentales coïncidant avec les fonctions fondamentales.

Nous donnons les deux exemples particuliers :

$$\begin{aligned}(0, 2\pi), \quad \chi(s, t) = & \frac{1}{\pi \lambda_1} (\sin s \sin t + \cos s \cos t) \\ & + \frac{\alpha}{\lambda_1^2} (\sin s + \beta \cos s) (\beta \sin t - \cos t),\end{aligned}$$

$$(0, 1), \quad \chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1} [1 - (6s - s)(6t - s)] + \frac{\alpha}{\lambda_1^2} (3s - 2)(3t - 2).$$

CHAPITRE II.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

§ 1. — Nombre de constantes caractéristiques.

1. Il est facile de construire des exemples à l'aide de la théorie exposée dans le Chapitre I. Étant donné un système biorthogonal quelconque, nous pouvons le diviser en groupes de fonctions et, avec

chaque groupe, nous pouvons construire une partie fondamentale à laquelle nous attachons la constante caractéristique que nous voulons. La somme de ces parties, supposée uniformément convergente, est un noyau dont nous connaissons les constantes caractéristiques, les fonctions fondamentales et les solutions fondamentales.

Le problème inverse, consistant à déterminer le système biorthogonal d'un noyau donné, est résolu par la méthode de M. Fredholm. Si nous pouvons séparer le noyau en plusieurs parties orthogonales, chacune de ces parties peut être considérée à part et le problème sera simplifié. Si nous pouvons trouver toutes les parties fondamentales, le problème sera résolu sans avoir recours à la méthode de M. Fredholm.

2. Il y a des noyaux sans constante caractéristique, par exemple la fonction $\frac{\sin s \cos t}{\lambda_1}$ pour l'intervalle $(0, 2\pi)$, ou encore la série supposée convergente

$$\sum_0^{\infty} a_{mn} \cos ms \sin nt.$$

Les noyaux des équations de Volterra appartiennent aussi à cette classe, car ils satisfont à la relation

$$K(s, t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq s.$$

Lorsque nous avons séparé les parties relatives à toutes les constantes caractéristiques, il peut rester une partie qui n'a pas de constante caractéristique que nous pouvons appeler la *partie relative à l'infini*.

Donc la forme la plus générale du noyau à n constantes caractéristiques distinctes est

$$(1) \quad K(s, t) = \gamma_1(s, t) + \gamma_2(s, t) + \gamma_3(s, t) + \dots + \gamma_n(s, t) + \gamma_{\infty}(s, t),$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sont les parties relatives à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Nous allons examiner maintenant quelques cas où le nombre de constantes caractéristiques est infini.

3. M. Hilbert ⁽¹⁾ définit le *noyau fermé* au cas symétrique par la condition qu'il n'existe pas une fonction continue $f(s)$ telle que

$$(2) \quad \int K(s, t) f(t) dt = 0.$$

Nous pouvons prendre la même condition pour définir le *noyau asymétrique fermé par rapport à t*.

Nous dirons que le *système biorthogonal*

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \dots, & \varphi_n(s), & \dots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \dots, & \psi_n(t), & \dots \end{cases}$$

est *fermé par rapport à t* lorsqu'il n'existe pas de fonction continue $f(s)$ telle que

$$\int \psi_n(s) f(s) ds = 0$$

pour toute valeur de n .

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer que, *si le système biorthogonal d'un noyau est fermé par rapport à t, le noyau est aussi fermé par rapport à t*.

Supposons, si c'est possible, qu'il existe une fonction $f(s)$ telle que

$$\int K(s, t) f(t) dt = 0.$$

Envisageons la constante caractéristique λ_1 à laquelle correspond la partie fondamentale

$$(4) \quad \chi(s, t) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} \varphi_i(s) \psi_j(t).$$

Nous écrivons

$$\beta_j = \int \psi_j(t) f(t) dt \quad (j = 1, 2, \dots, p);$$

⁽¹⁾ DAVID HILBERT, *Nach. zu Göttingen*, 1904, Heft 1.

or on a l'équation

$$\int K(s, t) \psi_j(s) ds = \frac{1}{\lambda_1} \sum_k \alpha_{jk} \psi_k(t);$$

donc

$$(5) \quad \frac{1}{\lambda_1} \sum_k \alpha_{jk} \beta_k = \int \int K(s, t) \psi_j(s) f(t) ds dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Ainsi les quantités β satisfont aux p équations linéaires sans seconds membres (5). Mais nous savons (Chap. I, § 3) que le déterminant $||\alpha_{jk}||$ de ces équations est égal à l'unité (en omettant le facteur commun $\frac{1}{\lambda_1}$). Donc il faut qu'on ait

$$\beta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

De même on démontre que

$$\int \psi_j(t) f(t) dt = 0$$

pour toutes les fonctions fondamentales du noyau, ce qui est contre l'hypothèse exprimant que le système biorthogonal est fermé.

Avec cette définition il n'est possible de démontrer l'inverse de cette proposition que pour certains cas particuliers. M. Hilbert l'a fait pour le cas symétrique; nous y reviendrons dans le § 2.

4. Nous prenons maintenant une définition différente du *noyau fermé*.

Nous supposons que le noyau $K(s, t)$ et la fonction continue $f(s)$ sont telles que les quantités

$$\begin{aligned} & |K(s, t)|, \quad |f(s)|, \\ & \frac{1}{|\varepsilon|} |K(s + \varepsilon, t) - K(s, t)|, \quad \frac{1}{|\varepsilon|} |f(s + \varepsilon) - f(s)|, \\ & \left| \int K(s, t) f(t) dt \right| \end{aligned}$$

ont respectivement les limites supérieures finies

$$I, \quad I, \quad K, \quad J, \quad i.$$

Le noyau $K(s, t)$ est fermé par rapport à t lorsqu'on a l'inégalité suivante :

$$(6) \quad (J + K)i^{1+\eta} > m > 0,$$

où η, m sont deux nombres positifs indépendants de $f(s)$.

Avec cette définition je peux énoncer le théorème suivant :

Lorsque $K(s, t)$ est un noyau fermé, ou que l'un de ses noyaux réitérés est fermé, $K(s, t)$ aura un nombre infini de constantes caractéristiques.

§. LEMME I. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau n'ait pas de constante caractéristique est la suivante : N'étant un nombre positif aussi grand qu'on veut, on peut trouver un nombre entier ν tel que, lorsque $n \geq \nu$, on a

$$|K_n(s, t)| \leq \frac{1}{N^n}.$$

En effet, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la résolvante

$$K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \dots + \lambda^n K_n(s, t) + \dots$$

soit une fonction entière de λ .

LEMME II. — Si la suite de nombres positifs

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots < \alpha_n \dots$$

représente la suite des modules des constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$, la suite

$$\alpha_1^\gamma < \alpha_2^\gamma < \alpha_3^\gamma \dots < \alpha_n^\gamma \dots$$

représentera la suite des modules des constantes caractéristiques du noyau réitéré $K_v(s, t)$.

Envisageons les deux résolvantes

$$(7) \quad \begin{cases} K(s, t, \lambda) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) \\ \quad + \lambda^2 K_3(s, t) + \dots + \lambda^n K_n(s, t) + \dots, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} K_v(s, t, \lambda) = K_v(s, t) + \lambda K_{2v}(s, t) \\ \quad + \lambda^2 K_{3v}(s, t) + \dots + \lambda^n K_{nv}(s, t) + \dots \end{cases}$$

La condition pour que la fonction (7) ait un pôle dont le module soit plus petit qu'un nombre positif α est la suivante : n_0 étant un nombre entier aussi grand qu'on veut, on peut toujours trouver n tel que

$$|K_n(s, t)| > C \frac{1}{\alpha^n}.$$

La condition pour que $K_v(s, t, \lambda)$ ait un pôle dont le module soit plus petit que α^v est qu'on peut trouver n tel que

$$|K_{nv}(s, t)| > C' \frac{1}{\alpha^{nv}}.$$

Ces deux conditions sont identiques.

Par conséquent, si $K(s, t)$ a une constante caractéristique dont le module est plus petit que α , $K_v(s, t)$ en a une dont le module est plus petit que α^v .

Soit maintenant $\chi(s, t)$ la partie du noyau $K(s, t)$ relative aux constantes caractéristiques dont les modules sont plus petits que α . $\chi_v(s, t)$ sera la partie du noyau $K_v(s, t)$ relative aux constantes caractéristiques dont les modules sont plus petits que α^v .

Nous appliquons maintenant le raisonnement précédent au noyau

$$K'(s, t) = K(s, t) - \chi(s, t)$$

et à sa réitération

$$K'_v(s, t) = K_v(s, t) - \chi_v(s, t).$$

et nous trouvons que, si $K'(s, t)$ a une constante caractéristique plus petite en module que $\beta > \alpha$, le noyau $K'_v(s, t)$ en aura une plus petite en module que α^v .

Ainsi, si $K(s, t)$ a une constante caractéristique λ , telle que

$$\alpha \leq |\lambda| < \beta,$$

le noyau réitéré $K_v(s, t)$ aura une constante caractéristique λ^v telle que

$$\alpha^v \leq |\lambda^v| < \beta^v.$$

Le lemme en résulte immédiatement.

6. En tenant compte du second lemme, il suffit, pour la proposition énoncée plus haut, de considérer le noyau $K(s, t)$ qui est lui-même fermé.

Nous supposons donc que $K(s, t)$ est fermé, et nous désignons par $M_1(t)$, $M_2(t)$, ..., $M_n(t)$, ... les limites supérieures de $|K(s, t)|$, $|K_2(s, t)|$, ..., $|K_n(s, t)|$, ... lorsque s varie, t étant fixe. Je vais démontrer d'abord les inégalités

$$1 \geq M_1(t) \geq M_2(t) \geq \dots \geq M_n(t) > 0,$$

où il est supposé que t a une valeur telle que $K(s, t)$ ne soit pas nul identiquement. On a

$$K_n(s, t) = \int K(s, \tau) K_{n-1}(\tau, t) d\tau.$$

Puisque $|K(s, t)| \leq 1$, on a

$$M_n(t) \leq M_{n-1}(t).$$

En nous rapportant à la définition du noyau fermé, il est clair que nous pouvons prendre pour $f(s)$ la fonction $\frac{K_{n-1}(s, t)}{M_{n-1}(t)}$. Il en résulte que $M_n(t)$ ne peut pas s'évanouir, à moins que $M_{n-1}(t)$ ne s'évanouisse

(¹) Voir définition du n° 4.

aussi. L'application successive de ces considérations démontre les inégalités énoncées.

7. Nous prenons maintenant pour $f(s)$ la fonction $\frac{K_n(s, t)}{M_n(t)}$. On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\varepsilon|} |f(s + \varepsilon) - f(s)| \\ &= \frac{1}{|\varepsilon|} \left| \int [K(s + \varepsilon, \tau) - K(s, \tau)] \frac{K_{n-1}(\tau, t)}{M_n(t)} d\tau \right| \leq K \frac{M_{n-1}(t)}{M_n(t)}. \end{aligned}$$

Donc la limite supérieure J de $\frac{1}{|\varepsilon|} |f(s + \varepsilon) - f(\tau)|$ satisfait à l'inégalité

$$J \leq K \frac{M_{n-1}(t)}{M_n(t)}.$$

La limite supérieure de

$$\left| \int K(s, t) f(t) dt \right| = \frac{|K_{n+1}(s, t)|}{M_n(t)}$$

est

$$\frac{M_{n+1}(t)}{M_n(t)} = i.$$

En nous servant de l'inégalité (6), nous avons

$$\left(K + K \frac{M_{n-1}}{M_n} \right) \left(\frac{M_{n+1}}{M_n} \right)^{1+\eta} \geq (J + K) i^{1+\eta} \geq m,$$

où nous avons omis l'argument fixe t des fonctions M .

La dernière inégalité nous donne

$$\begin{aligned} \frac{M_{n+1}}{M_n} &\geq \left(\frac{m}{K} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \left(1 + \frac{M_{n-1}}{M_n} \right)^{\frac{-1}{1+\eta}} \\ &= \left(\frac{m}{K} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \left(\frac{M_n}{M_{n-1}} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \left(\frac{M_n}{M_{n-1}} + 1 \right)^{\frac{-1}{1+\eta}} \geq \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \left(\frac{M_n}{M_{n-1}} \right)^{\frac{1}{1+\eta}}, \end{aligned}$$

puisque $\frac{M_n}{M_{n-1}} \leq 1$.

Par l'application successive de cette formule, nous avons

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \geq \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{1+\eta} + \dots + \frac{1}{1+\eta}} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1}{1+\eta}}.$$

Or faisons

$$0 < c = \frac{M_2}{M_1} \leq \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1}{(1+\eta)^{n-1}}} \leq 1.$$

On peut ensuite supposer que m est choisi de manière que

$$\frac{m}{2K} \leq 1,$$

pour qu'on ait

$$\left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{(1+\eta)^2} + \dots + \frac{1}{(1+\eta)^n}} \geq \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{1+\eta} \frac{1}{1-\frac{1}{1+\eta}}} = \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{\eta}}.$$

Donc

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \geq \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{\eta}} c$$

et, par conséquent,

$$M_{n+1} \geq \left[\left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{\eta}} c \right]^n M_1.$$

Or la quantité $\left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{\eta}} c$ est plus grande que zéro.

Donc par le premier lemme il est impossible que $K(s, t)$ n'ait pas de constante caractéristique. C'est-à-dire que $K(s, t)$ a au moins une constante caractéristique.

Pour compléter le théorème, il faut démontrer que, si l'on admet que $K(s, t)$ a un nombre fini de constantes caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$, il faut que $K(s, t)$ en ait aussi une autre λ_{v+1} .

Soit $\chi(s, t)$ la partie de $K(s, t)$ relative à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$.

Écrivons

$$K'(s, t) = K(s, t) - \chi(s, t).$$

Il faut démontrer que $K'(s, t)$ a une constante caractéristique.

Le noyau $K'(s, t)$ n'est pas fermé, mais toute fonction $f(s)$, telle que

$$\int \chi(s, t) f(t) dt = 0,$$

satisfait à la relation (6).

Les fonctions

$$\frac{K'_1(s, t)}{M'_1(t)}, \quad \frac{K'_2(s, t)}{M'_2(t)}, \quad \dots, \quad \frac{K'_n(s, t)}{M'_n(t)},$$

$M'_1(t), M'_2(t), \dots, M'_n(t), \dots$ étant les limites supérieures de $K'_1(s, t), K'_2(s, t), \dots, K'_n(s, t), \dots$, sont des fonctions appartenant à cette catégorie. Donc, en nous servant du procédé déjà employé, nous pouvons démontrer que

$$M'_1(t) \geq M'_2(t) \geq \dots \geq M'_n(t) \geq 0$$

[à moins que $M'_1(t) = 0$]. Nous ne pouvons pas écrire $1 \geq M'_1(t)$.

En prenant pour $f(s)$ maintenant la fonction $\frac{K'_n(s, t)}{M'_n(t)}$, nous pouvons démontrer, comme auparavant, qu'on a

$$M'_{n+1}(t) \geq \left[c' \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right]^n M'_1(t).$$

Il en résulte que $K'(s, t)$ a au moins une constante caractéristique. Le théorème est maintenant établi.

8. Nous remarquons que, si $c'(t), c''(t), c'''(t), \dots, c^{(\nu)}(t), \dots$ représentent les valeurs de $\frac{M_2(t)}{M_1(t)}$ relatives aux noyaux qu'on obtient en retranchant successivement de $K(s, t)$ les parties relatives à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, \dots$, on a

$$|\lambda_1| \leq \frac{1}{c'\alpha}, \quad |\lambda_2| \leq \frac{1}{c''\alpha}, \quad \dots, \quad |\lambda_\nu| \leq \frac{1}{c^{(\nu)}\alpha},$$

où $\alpha = \left(\frac{m}{2K} \right)^{\frac{1}{\eta}}$, et où l'on peut toujours prendre la valeur maximum de $c^{(\nu)}(t)$. Puisque λ_ν tend vers l'infini, il faut que $c^{(\nu)}$ tende vers zéro.

§ 2. — Cas symétrique.

9. Le noyau symétrique a été étudié d'une manière très complète

par MM. Hilbert ⁽¹⁾ et Erhard Schmidt ⁽²⁾. Ils ont démontré qu'un tel noyau avait toujours une constante caractéristique et que toutes ses constantes caractéristiques étaient des pôles simples de la résolvante. Le système biorthogonal devient un système orthogonal. M. Hilbert démontre qu'un noyau fermé d'après sa définition a un système orthogonal fermé et par conséquent infini.

Au moyen de la théorie développée dans le Chapitre I, nous pouvons retrouver plusieurs résultats de MM. Hilbert et Schmidt. Nous donnons quelques démonstrations à titre d'exemples.

10. Il est évident d'abord que *toutes les constantes caractéristiques d'un noyau symétrique réel $K(s, t)$ sont réelles*. Si

$$\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$$

était une constante caractéristique complexe de $K(s, t)$, et si

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \varphi'(s) + i\varphi''(s), \\ \varphi_1(t) &= \varphi'(t) + i\varphi''(t)\end{aligned}$$

étaient une paire de fonctions fondamentales correspondantes, nous aurions aussi la constante conjuguée

$$\lambda_2 = \lambda' - i\lambda''$$

avec sa paire de fonctions

$$\begin{aligned}\varphi_2(s) &= \varphi'(s) - i\varphi''(s), \\ \varphi_2(t) &= \varphi'(t) - i\varphi''(t).\end{aligned}$$

La condition d'orthogonalité est maintenant impossible, car

$$\int \varphi_1(s) \varphi_2(s) ds = \int (|\varphi'(s)|^2 + |\varphi''(s)|^2) ds > 0.$$

Donc toutes les constantes caractéristiques sont réelles.

⁽¹⁾ DAVID HILBERT, *Nach. zu Göttingen*, Heft. I, 1904.

⁽²⁾ ERHARD SCHMIDT, *Thèse*, Göttingen, 1905.

Les constantes caractéristiques sont des pôles simples de la résolvante. Soit

$$\chi(s, t, \lambda) = \frac{\varphi_1(s, t)}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{\varphi_2(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^2} + \frac{\varphi_3(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^3} + \dots + \frac{\varphi_n(s, t)}{(\lambda_1 - \lambda)^n}$$

la partie de $K(s, t, \lambda)$ relative à λ_1 . Je vais démontrer qu'on a identiquement

$$\varphi_2(s, t) = 0.$$

Il en résultera qu'on a également

$$\varphi_3(s, t) = \dots = \varphi_n(s, t) = 0.$$

La fonction $\varphi_2(s, t)$ aura la forme

$$\varphi_2(s, t) = \sum_1^p a_{ij} \varphi_i(s) \varphi_j(t)$$

avec les conditions

$$\sum_1^p a_{ii} = 0,$$

$$\sum_1^p a_{ij} a_{ji} = 0,$$

.....

Or, nous avons par symétrie

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Donc la seconde condition donne

$$\sum_1^p a_{ij}^2 = 0$$

et, par conséquent,

$$a_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, p).$$

11. Nous pouvons voir facilement que le noyau fermé au sens de M. Hilbert a un nombre infini de constantes caractéristiques, en nous

servant du fait que tout noyau symétrique a au moins *une* constante caractéristique ⁽¹⁾. En effet, si $K(s, t)$ avait un nombre fini de constantes caractéristiques, on pourrait écrire

$$K(s, t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s) \varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n} + \varphi_0(s, t),$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne sont pas nécessairement distinctes. La fonction $\varphi_0(s, t)$ sera un noyau sans constante caractéristique et, par conséquent, on a identiquement

$$\varphi_0(s, t) = 0.$$

Il est évident maintenant que le noyau

$$K(s, t) = \frac{\varphi_1(s) \varphi_1(t)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(s) \varphi_2(t)}{\lambda_2} + \dots + \frac{\varphi_n(s) \varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

n'est pas fermé. Donc la proposition est démontrée.

Il faut remarquer que nous avons considéré seulement le cas *réel*; lorsqu'un noyau symétrique n'est pas réel, les propositions précédentes ne sont plus exactes.

12. Les noyaux de la forme $K(s, t)p(t)$, où $K(s, t)$ est symétrique, ont une très grande importance en Physique mathématique. M. Schmidt démontre qu'on peut les ramener au cas symétrique réel lorsque la fonction $p(t)$ garde toujours le même signe. Si nous écrivons

$$K'(s, t) = K(s, t) \sqrt{p(s)p(t)}, \quad \varphi'(s) = \varphi(s) \sqrt{p(s)},$$

l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda \int K(s, t) p(t) \varphi(t) dt = f(s)$$

devient

$$\varphi'(s) - \lambda \int K'(s, t) \varphi'(t) dt = f(s) \sqrt{p(s)},$$

(1) ERHARD SCHMIDT, *loc. cit.* — ADOLF KNESER, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, juillet 1906.

et nous avons à considérer le noyau $K'(s, t)$ seulement. Lorsque la fonction $p(s)$ change de signe, le noyau $K'(s, t)$ est complexe et la transformation n'est pas utile. Il sera intéressant d'illustrer ces faits par un exemple. Cet exemple démontrera, en particulier, qu'un noyau de la forme $K(s, t)p(t)$ peut avoir une résolvante avec des pôles multiples lorsque $p(t)$ ne garde pas le même signe.

Nous allons prendre le noyau

$$K(s, t) = \varphi_1(s)\psi_1(t) + \varphi_2(s)\psi_2(t) \\ + \alpha[\varphi_1(s) - \beta\varphi_2(s)][\beta\psi_1(t) + \psi_2(t)],$$

dont la résolvante a un pôle double $\lambda_1 = 1$; nous nous demandons si ce noyau peut avoir la forme

$$K'(s, t)p(t),$$

où $K'(s, t)$ est symétrique. Pour cela, il faut que la fonction

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} p(s)K(s, t) &= (1 + \alpha\beta)\varphi_1(s)p(s)\psi_1(t) \\ &\quad + (1 - \alpha\beta)\varphi_2(s)p(s)\psi_2(t) \\ &\quad + \alpha\varphi_1(s)p(s)\psi_2(t) - \alpha\beta^2\varphi_2(s)p(s)\psi_1(t) \end{aligned} \right.$$

soit symétrique. Il existe donc deux relations comme

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(s)p(s) &= a\psi_1(s) + b\psi_2(s), \\ \varphi_2(s)p(s) &= b'\psi_1(s) + c\psi_2(s). \end{aligned} \right.$$

On obtient les valeurs des coefficients a, b, b', c en considérant les propriétés biorthogonales de $\varphi_1(s), \psi_1(t), \varphi_2(s), \psi_2(t)$; on a

$$a = \int [\varphi_1(s)]^2 p(s) ds = k_1,$$

$$b = b' = \int \varphi_1(s)\varphi_2(s)p(s) ds = k',$$

$$c = \int [\varphi_2(s)]^2 p(s) ds = k_2,$$

et nous sommes conduit aux relations

$$(9) \quad \begin{cases} \psi_1(s) = \frac{1}{J^2} p(s) [k_2 \varphi_1(s) - k' \varphi_2(s)], \\ \psi_2(s) = \frac{1}{J^2} p(s) [k' \varphi_1(s) - k_1 \varphi_2(s)], \end{cases}$$

où

$$J = + \sqrt{k'^2 - k_1 k_2}.$$

Enfin, pour que (7) soit symétrique, il faut, en substituant (8) dans (7), que les coefficients de $\psi_1(s)\psi_2(t)$ et de $\psi_2(s)\psi_1(t)$ soient égaux.

C'est-à-dire

$$(10) \quad \begin{aligned} (1 - \alpha\beta)b + \alpha a &= (1 + \alpha\beta)b - \alpha\beta^2 c, \\ a - 2\beta b + \beta^2 c &= 0, \\ k_2\beta^2 - 2k'\beta + k_1 &= 0. \end{aligned}$$

Donc β doit être une racine d'une équation quadratique si l'on suppose que $\alpha \neq 0$. On a

$$\beta = \frac{1}{k_2} (k' \pm \sqrt{k'^2 - k_1 k_2}) = \frac{1}{k_2} (k' \pm J).$$

Donc il est toujours possible d'avoir une valeur réelle de β , pourvu que

$$k'^2 \geq k_1 k_2.$$

Mais, dans le cas où $p(t) \geq 0$, il sera impossible d'avoir une valeur réelle de β ; car considérons l'intégrale

$$\int [l\varphi_1(s) + m\varphi_2(s)]^2 p(s) ds > 0.$$

On a, quel que soit l, m ,

$$l^2 k_1 + 2lmk' + m^2 k_2 > 0.$$

Donc

$$k'^2 < k_1 k_2.$$

§ 3. — Développements en séries de fonctions fondamentales.

13. Nous avons vu que les fonctions fondamentales d'un noyau quelconque formaient un système biorthogonal

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_1(s), & \varphi_2(s), & \dots & \varphi_n(s), & \dots, \\ \psi_1(t), & \psi_2(t), & \dots, & \psi_n(t), & \dots \end{cases}$$

Il est facile de démontrer que les fonctions de la première ligne d'un système biorthogonal quelconque sont linéairement indépendantes. Admettons qu'il existe pour le système (11) une relation

$$a_1 \varphi_1(s) + a_2 \varphi_2(s) + \dots + a_k \varphi_k(s) = 0.$$

Nous multiplions par $\psi_1(s)$ et nous intégrons. Nous aurons ainsi, à cause des relations

$$\begin{aligned} \int \varphi_m(s) \psi_n(s) ds &= 1 & \text{si} & \quad m = n, \\ &= 0 & \text{si} & \quad m \neq n, \end{aligned}$$

le résultat

$$a_1 = 0$$

et, de même,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0.$$

Donc les fonctions

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \dots, \quad \varphi_k(s)$$

sont indépendantes. Les fonctions

$$\psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \dots, \quad \psi_k(t)$$

sont également indépendantes.

14. A la fin du premier Chapitre, nous avons indiqué plusieurs développements qui sont valables dans le cas de convergence uniforme. Si nous savons qu'une fonction est développable suivant une

série uniformément convergente de fonctions continues indépendantes

$$\varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \dots, \quad \varphi_n(s), \quad \dots,$$

nous pouvons déterminer les coefficients. Soit

$$(12) \quad f(s) = a_1 \varphi_1(s) + a_2 \varphi_2(s) + \dots + a_n \varphi_n(s) + \dots$$

le développement, et soit

$$\psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \dots, \quad \psi_n(t), \quad \dots$$

une suite de fonctions continues biorthogonales à la suite de φ . On aura

$$a_n = \int f(t) \psi_n(s) ds.$$

Dans le cas où le système biorthogonal est fermé par rapport à t , c'est-à-dire dans le cas où il n'existe aucune fonction continue $g(s)$ telle que

$$\int g(s) \psi_n(s) ds = 0$$

pour toute valeur de n , nous voyons facilement que la série (12) représentera une fonction continue *arbitraire* $f(s)$, pourvu qu'elle soit uniformément convergente.

Écrivons

$$\varphi_0(s) = f(s) - \sum_1^{\infty} a_n \varphi_n(s).$$

Nous avons

$$\int \psi_m(s) \varphi_0(s) ds = \int \psi_m(s) f(s) ds - \sum_1^{\infty} a_n \int \varphi_n(s) \psi_m(s) ds = a_m - a_m = 0$$

pour toute valeur de m . Donc

$$\varphi_0(s) = 0.$$

Nous ne pouvons pas déterminer dans le cas général si la conver-

gence uniforme a lieu; mais MM. Hilbert ⁽¹⁾ et Erhard Schmidt ⁽²⁾ ont pu approfondir la question dans le cas symétrique.

Ils ont démontré que toute fonction $g(s)$ qui a pour expression

$$g(s) = \int K(s, t) h(t) dt,$$

$h(t)$ étant une fonction continue, se développe en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$. Si $K(s, t)$ est un noyau tel qu'on peut faire tendre vers zéro l'expression

$$\int \left[g(s) - \int K(s, t) h(t) dt \right]^2 ds = \varepsilon,$$

en choisissant convenablement la fonction continue $h(t)$, où $g(s)$ est une fonction continue quelconque, il sera toujours possible de développer $g(s)$ en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$.

M. Poincaré a démontré la convergence uniforme dans beaucoup de cas qui interviennent en Physique mathématique.

13. De ce qui précède, il est évident que la question du développement en série de fonctions fondamentales est étroitement liée avec la question de la solution de l'équation intégrale de première espèce

$$(13) \quad g(s) = \int K(s, t) \varphi(t) dt,$$

où $g(s)$ est une fonction connue, et il s'agit de déterminer $\varphi(t)$. M. Bateman ⁽³⁾ a démontré un théorème qui est l'inverse de celui de M. Hilbert: *Si $g(s)$ est développable en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $K(s, t)$, l'équation (13) aura la solution*

$$\varphi(t) = 2 \int_0^\infty F(t, x) dx,$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

⁽²⁾ *Loc. cit.*

⁽³⁾ H. BATEMAN, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1906.

où $F(t, x)$ est la fonction entière de x , représentée par la série

$$\begin{aligned} F(t, x) = & x \int K(t, \tau) f(\tau) d\tau \\ & - \frac{x^3}{1!} \int \int \int K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) K(\tau_2, \tau_3) f(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \\ & + \frac{x^5}{5!} \int \int \int \int \int K(t, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) K(\tau_2, \tau_3) K(\tau_3, \tau_4) K(\tau_4, \tau_5) \\ & \times f(\tau_5) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 d\tau_5 - + \dots \end{aligned}$$

Lorsque le noyau $K(s, t)$ n'est pas symétrique, M. Bateman trouve une solution de l'équation (13) dans le cas où $g(s)$ est développable en série de fonctions fondamentales du noyau symétrique

$$g(s, t) = \int K(s, \tau) K(t, \tau) d\tau.$$

Mais la méthode de M. Bateman pour le noyau symétrique s'applique directement au noyau asymétrique lorsque les constantes caractéristiques sont réelles et qu'elles sont des pôles simples de la résolvante.

La solution de (13) est unique seulement lorsque $K(s, t)$ est fermé par rapport à t . Dans les autres cas, nous pouvons ajouter à la solution particulière $h_0(s)$, trouvée par la méthode de M. Bateman ou autrement, une fonction continue quelconque $h_1(s)$ qui satisfait à

$$\int K(s, t) h_1(t) dt = 0.$$

Ainsi nous aurons

$$h(s) = h_0(s) + h_1(s).$$

On peut en donner des exemples :

Soit

$$\begin{aligned} \varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \quad \dots, \quad \varphi_n(s), \quad \dots, \\ \psi_1(t), \quad \psi_2(t), \quad \dots, \quad \psi_n(t), \quad \dots \end{aligned}$$

un système biorthogonal fermé par rapport à t .

H.

Considérons le noyau

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \sum_{j=i_1}^{j=i_p} a_{ij} \varphi_i(s) \psi_j(t),$$

série que nous supposons aussi uniformément convergente.

Soit

$$g(s) = \sum_{i=1}^{i=\infty} b_i \varphi_i(s),$$

série que nous supposons aussi uniformément convergente.

Dans l'équation

$$g(s) = \int K(s, t) \varphi(t) dt,$$

nous égalons les coefficients de $\varphi_i(s)$ dans les deux membres

$$(14) \quad b_i = \sum_{j=i_1}^{j=i_p} a_{ij} \int \psi_j(t) \varphi(t) dt.$$

Supposons qu'une solution continue $\varphi(t)$ existe; mettons

$$\varphi(t) = \alpha_{i_1} \varphi_{i_1}(t) + \alpha_{i_2} \varphi_{i_2}(t) + \dots + \alpha_{i_p} \varphi_{i_p}(t) + \varphi'_i(t),$$

où $\varphi'_i(t)$ est orthogonale à $\psi_{i_1}(t)$, $\psi_{i_2}(t)$, ..., $\psi_{i_p}(t)$; c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha_{i_1} = \int \varphi(t) \psi_{i_1}(t) dt,$$

$$\alpha_{i_2} = \int \varphi(t) \psi_{i_2}(t) dt,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_{i_p} = \int \varphi(t) \psi_{i_p}(t) dt.$$

Donc, en écrivant l'équation (14) pour $i = i_1, i_2, \dots, i_p$, nous aurons les équations

$$b_{i_1} = a_{i_1 i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_1 i_2} \alpha_{i_2} + \dots + a_{i_1 i_p} \alpha_{i_p},$$

$$b_{i_2} = a_{i_2 i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_2 i_2} \alpha_{i_2} + \dots + a_{i_2 i_p} \alpha_{i_p},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_{i_p} = a_{i_p i_1} \alpha_{i_1} + a_{i_p i_2} \alpha_{i_2} + \dots + a_{i_p i_p} \alpha_{i_p}.$$

Or, nous savons que le déterminant (Chap. I, § 3)

$$\|a_{i_p i_p}\| = \frac{1}{\lambda_i}.$$

Par conséquent, les coefficients $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_p}$ sont déterminés.

Nous pouvons déterminer les autres coefficients analogues

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_n, \quad \dots,$$

et nous aurons

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) + \dots + \varphi'(t),$$

où $\varphi'(t)$ est orthogonale à $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t), \dots$, et, par conséquent,

$$\varphi'(t) = 0,$$

pourvu que cette série soit uniformément convergente. Nous aurons déterminé une solution de l'équation (13), et cette solution sera unique.

16. Dans le cas où les constantes caractéristiques de $K(s, t)$ sont des pôles simples de la résolvante, nous pourrions écrire

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(s) \psi_i(t),$$

et la solution sera

$$\varphi(t) = b_1 \lambda_1 \varphi_1(t) + b_2 \lambda_2 \varphi_2(t) + \dots + b_n \lambda_n \varphi_n(t) + \dots$$

Prenons maintenant le noyau

$$K(s, t) = a \varphi_1(s) \psi_1(t) + b \varphi_2(s) \psi_2(t) + c \varphi_3(s) \psi_3(t),$$

dont les fonctions fondamentales sont

$$\begin{aligned} \varphi_1(s), \quad \varphi_2(s), \\ \psi_1(t), \quad \psi_2(t). \end{aligned}$$

Il y aura une solution de (13) pourvu que $g(s)$ ait la forme

$$g(s) = a' \varphi_1(s) + b' \varphi_2(s) + c' \varphi_3(s),$$

et dans ce cas seulement. La solution sera

$$\varphi(s) = \frac{a'}{a} \varphi_1(s) + \frac{b'}{b} \varphi_2(s) + \frac{c'}{c} \varphi_3(s).$$

Elle ne sera pas unique, puisque nous pouvons ajouter à cette expression une fonction linéaire quelconque de

$$\varphi_3(s), \quad \varphi_5(s), \quad \dots, \quad \varphi_n(s), \quad \dots,$$

qui sont les solutions de

$$\int K(s, t) \varphi(t) dt = 0.$$

17. Remarquons enfin que l'équation intégrale de première espèce

$$\int K(s, t) \varphi(t) dt = g(s)$$

peut être regardée comme le cas limite de l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) + \lambda \int K(s, t) \varphi(t) dt = \lambda g(s),$$

lorsque λ tend vers l'infini. Si la solution de la dernière équation tend vers une fonction intégrable lorsque λ tend vers l'infini d'une manière convenable, la limite de $\varphi(s)$ sera une solution de la première équation. Les solutions de l'équation

$$\int K(s, t) \varphi(t) dt = 0$$

seront les solutions fondamentales relatives à $\lambda = \infty$.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS A LA THÉORIE DU POTENTIEL.

§ 1. — Les problèmes de Neumann et de Dirichlet ⁽¹⁾.

1. Soit $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ la densité au point (ξ, η, ζ) d'une distribution de matière dont chaque partie est située à une distance finie de l'origine. On suppose que ρ est partout finie et intégrable; ρ n'est pas nécessairement continue.

On définit le potentiel de la distribution de matière par la formule

$$(1) \quad V(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

où

$$r = + \sqrt{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]}$$

est la distance entre les points (x, y, z) , (ξ, η, ζ) et l'intégration s'étend à toute la région considérée.

Le potentiel V et ses dérivées premières sont des fonctions finies et continues : les dérivées secondes satisfont à l'équation de Poisson

$$(2) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \rho(x, y, z).$$

A l'infini V tend vers zéro comme $\frac{1}{r}$.

On définit dans de pareilles conditions le potentiel d'une distribution de matière dans deux dimensions par la formule

$$V(x, y) = \iint \rho(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi d\eta,$$

(¹) H. POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. XX, 1897; *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1894. — IVAR FREDHOLM, *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, Stockholm, 1900. — PLEMELJ, *Monatshefte für Math. u. Physik*, XV Jahrgang, 1904. — E. PICARD, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 1906; *Acta mathematica*, t. XXV, 1902.

où

$$r = +\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]}.$$

La fonction V satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2\pi\rho(x, y),$$

et, en général, elle tend vers l'infini de la même façon que $\log r$, lorsque le point (x, y) s'éloigne indéfiniment.

2. Soit maintenant S une surface analytique qui, en chaque point, a un plan tangent unique.

Soit $\rho(M)$ une fonction finie, intégrable, définie pour chaque point M de S . On appelle l'intégrale

$$(3) \quad V = \int_{(S)} \frac{\rho(P)}{r} d\sigma,$$

où $d\sigma$ désigne un élément de S , le *potentiel de la simple couche* ρ étalée sur S .

Nous supposons que la surface S est fermée, et nous désignons par n la longueur de la normale en un point P , dirigée vers l'intérieur.

Nous désignons par $\frac{dV}{dn_i}$ la valeur à la limite de $\frac{dV}{dn}$ lorsqu'en partant d'un point intérieur on s'approche de S le long de la normale en P . Nous désignons par $\frac{dV}{dn_e}$ la limite correspondante lorsqu'on part d'un point extérieur.

Nous désignons par ψ l'angle de la normale en M et du rayon vecteur qui réunit le point M avec l'élément $d\sigma$.

On peut établir les formules suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dn_e} - \frac{dV}{dn_i} \right) = 2\pi\rho, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} \right) = \int \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma. \end{cases}$$

La fonction V est continue à travers la surface S .

Le cas le plus important d'une simple couche est celui où il s'agit

d'une distribution d'électricité sur la surface d'un corps : si le corps est conducteur, le potentiel V est constant à l'intérieur de la surface.

On définit dans de pareilles conditions le potentiel d'une simple couche étalée sur une courbe dans un espace à deux dimensions par la formule

$$V = \int \rho(P) \log \frac{1}{r} d\sigma.$$

Le potentiel V satisfait aux équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dn_e} - \frac{dV}{dn_i} \right) &= \pi \rho, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} \right) &= \int \rho \frac{\cos \psi}{r} d\sigma. \end{aligned}$$

5. Prenons une nouvelle fonction $\rho'(M)$ finie et intégrable, définie pour tout point de S . On appelle *potentiel de double couche de densité* ρ' l'intégrale

$$(5) \quad W = \int \rho(P) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma,$$

où φ désigne l'angle que fait la normale intérieure à la surface, à l'élément $d\sigma$, avec le rayon vecteur mené de $d\sigma$ au point M . La fonction W est finie, mais elle n'est pas continue.

On peut établir les formules suivantes :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} (W_i - W_e) = 2\pi \rho, \\ \frac{1}{2} (W_i + W_e) = \int_S \rho(P) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\sigma, \end{cases}$$

où W_i , W_e désignent respectivement les limites intérieure et extérieure de W lorsqu'on s'approche du point M de la surface le long de la normale.

Les dérivées normales de W n'ont pas nécessairement des limites sur la surface; mais, si M_i , M_e désignent deux points sur la normale, l'un intérieur et l'autre extérieur, et équidistants de P , on a

$$\lim_{M_e P = P M_i = 0} \left(\frac{dW}{dn_{M_e}} - \frac{dW}{dn_{M_i}} \right) = 0.$$

Les couches magnétiques sont des doubles couches.

Pour deux dimensions nous avons les équations analogues

$$W = \int \rho(P) \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma,$$

$$\frac{1}{2}(W_i - W_e) = \pi \rho,$$

$$\frac{1}{2}(W_i + W_e) = \int \rho(P) \frac{\cos \varphi}{r} d\sigma.$$

4. Une fonction V est dite *harmonique* lorsque dans la région de l'espace considérée elle est analytique et satisfait à l'équation

$$\Delta V = 0.$$

Un potentiel est une fonction harmonique dans les régions qui ne contiennent pas de matière.

Soit S une surface analytique, fermée, uniconnexe, ayant en chaque point un plan tangent unique. Nous nous posons les problèmes suivants :

1° Trouver une fonction V , harmonique à l'intérieur de S , et qui tend vers une fonction donnée sur S ;

2° Le problème correspondant à 1° pour l'extérieur de S ;

3° Trouver une fonction V , harmonique à l'intérieur de S , et telle que $\frac{dV}{dn_i}$ soit une fonction donnée;

4° Le problème correspondant à 3° pour l'extérieur de S .

Les problèmes 1° et 2° seront résolus si l'on peut trouver des doubles couches étalées sur S dont les potentiels satisfassent aux conditions en question.

La détermination de V reviendra alors à une intégration.

On peut traiter 3° et 4° également au moyen de simples couches.

Ces considérations nous permettent de ramener nos problèmes à la solution d'équations de Fredholm. Dans 1° la donnée est

$$(7) \quad W_i = f(M) = \text{fonction connue},$$

d'où l'on a, au moyen de (6),

$$2\pi\rho(M) + \int \rho(P) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma = f(M).$$

Posons le problème plus général de trouver une double couche qui satisfasse à la condition

$$W_i + \mu W_e = f(M).$$

Ce problème est exprimé par l'équation

$$(8) \quad 2\pi\rho(M) + \lambda \int \rho(P) \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma = f_1(M),$$

où

$$\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}, \quad f_1(M) = \frac{1}{1-\mu} f(M).$$

Pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire $\mu = 0$, nous avons le problème 1°.

Pour $\lambda = -1$, c'est-à-dire $\mu = \infty$, nous avons le problème 2°.

De même la simple couche qui satisfera à l'équation

$$(9) \quad \mu \frac{dV}{du_i} + \frac{dV}{du_e} = g(M)$$

sera donnée par

$$(10) \quad 2\pi\rho(M) + \lambda \int \rho(P) \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma = g_1(M),$$

où

$$g_1(M) = \frac{1}{1-\mu} g(M).$$

Les deux équations (8) et (10) sont *associées*.

Nous aurons les problèmes 3° et 4° pour $\lambda = -1$ et $\lambda = +1$ respectivement.

Une étude des propriétés des potentiels donne les résultats suivants à propos des constantes caractéristiques des équations (8) et (10) :

Elles sont réelles; elles sont des pôles simples de la résolvante; la première, $\lambda_1 = -1$; les autres ont des modules plus grands que l'unité.

Puisque $\lambda = 1$ n'est pas une constante caractéristique, il est évident que les problèmes 1° et 4° ont toujours une solution. Les problèmes 2° et 3° qui correspondent à $\lambda = -1$ n'ont pas en général de solution; pour que les problèmes 2° et 3° aient des solutions il faut que les fonctions $f(M)$, $g(M)$ satisfassent à certaines conditions que nous allons préciser plus loin.

3. Nous écrivons maintenant le système de constantes caractéristiques

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \dots, \quad \lambda_n, \quad \dots,$$

avec le système biorthogonal correspondant :

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi_1(M), & \varphi_2(M), & \dots, & \varphi_n(M), & \dots, \\ \psi_1(M), & \psi_2(M), & \dots, & \psi_n(M), & \dots \end{array}$$

Les deux fonctions φ_1, ψ_1 satisfont aux deux équations

$$(11) \quad 2\pi\varphi(M) - \int \varphi(P) d\alpha = 0$$

(où $d\alpha = \frac{\cos\varphi}{r^2} d\sigma$ est l'angle solide en P sous lequel on voit l'élément de surface $d\sigma$) et

$$(12) \quad 2\pi\psi(M) - \int \psi(P) \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma = 0,$$

qui correspondent respectivement aux conditions

$$(13) \quad W_e = 0,$$

$$(14) \quad \frac{dV}{dn_i} = 0.$$

La solution de (11) est une constante que nous prenons égale à l'unité

$$(15) \quad \varphi_1(M) = 1.$$

C'est la double couche dont le potentiel extérieur s'annule.

La solution de (12) est une couche d'électricité en équilibre. Son potentiel est constant sur S et à l'intérieur de S. On démontre qu'elle est la seule solution. Supposons qu'il y ait deux solutions de (12) : $\psi_1(M)$ et $\psi'_1(M)$. Il est possible de faire une combinaison

$$\rho(M) = \alpha\psi_1(M) + \beta\psi'_1(M),$$

telle que

$$\int \rho(P) d\sigma = 0.$$

Or, par (4) et (14),

$$\frac{dV}{dn_e} = 4\pi\rho(M).$$

Mais $\frac{dV}{dn_e}$ a partout le même signe. Donc

$$\rho(M) = \alpha\psi_1(M) + \beta\psi'_1(M) = 0,$$

et les deux solutions $\psi_1(M)$, $\psi'_1(M)$ ne sont pas indépendantes.

La solution (15) de l'équation (11) est également unique.

Nous avons maintenant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (8) et (10) aient des solutions. Pour (8) la condition est

$$(15_1) \quad \int f(P) \psi_1(P) d\sigma = 0,$$

où $\psi_1(M)$ est une couche d'électricité en équilibre; c'est une fonction qui garde le même signe. Pour (10) nous avons

$$(15_2) \quad \int g(P) d\sigma = 0.$$

Ces deux conditions déterminent les cas où les problèmes 2° et 3° sont résolubles au moyen de couches simples ou doubles. Mais il peut se faire que les problèmes aient des solutions même si les couches n'existent pas. Considérons le problème 2° lorsqu'on a

$$\int f(P) \psi_1(P) d\sigma = C \neq 0,$$

et supposons que

$$\int \psi_1(P) d\sigma = 1.$$

Nous pouvons trouver une fonction harmonique V_1 à l'intérieur de S qui devient égale à $f(M) - C$ sur S , puisque cette fonction satisfait à la condition (15₁). Nous aurons ainsi la solution

$$V = V_1 + C$$

du problème 2^o, qui existe donc toujours.

On peut résoudre le problème autrement, suivant Lord Kelvin (¹), par l'inversion du problème intérieur.

Considérons maintenant le problème 3^o, lorsqu'on a

$$\int g(P) d\sigma = C \neq 0.$$

Nous pouvons résoudre le problème si nous remplaçons $g(P)$ par $g(P) - \frac{C}{S}$, où S est l'aire de la surface; soit V_1 la solution. Si nous écrivons

$$V = V_1 + V_2,$$

V_2 sera une fonction harmonique à l'intérieur de S , telle que $\frac{dV_2}{dn} = \frac{C}{S}$. Or la condition qu'on tire de l'équation de Green,

$$\int \frac{dV_2}{dn} d\sigma = 0,$$

démontre que V_2 ne peut pas exister. Donc il y a une solution du problème 3^o seulement dans le cas où la condition (15₂) est vérifiée.

Considérons maintenant l'équation de Green,

$$\iiint \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz = - \int V \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

Cette équation appliquée à l'intérieur de S démontre qu'une fonction harmonique s'évanouissant sur S est nulle identiquement à l'intérieur de S , et qu'une fonction harmonique dont la dérivée normale s'évanouit sur S est constante à l'intérieur de S . Il en résulte que la

(¹) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 64.

solution du problème 1° est unique, et que la solution du problème 3° est unique à une constante arbitraire près. On a les mêmes résultats pour les problèmes 2° et 4° respectivement si l'on suppose que V est telle que l'intégrale

$$\int V \frac{dV}{dn} d\sigma,$$

étendue à une sphère dont le centre est à l'origine, tend vers zéro lorsque le rayon de la sphère tend vers l'infini.

6. Les deux fonctions fondamentales $\varphi_n(M)$, $\psi_n(M)$ sont respectivement les solutions des équations

$$2\pi\varphi(M) + \lambda_n \int \varphi(P) d\alpha = 0,$$

$$2\pi\psi(M) + \lambda_n \int \psi(P) \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma = 0.$$

Les potentiels de ces fonctions considérées comme double couche et simple couche respectivement satisfont aux conditions

$$W_i + \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} W_e = 0,$$

$$\frac{dV}{dn_i} + \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - 1} \frac{dV}{dn_e} = 0.$$

En nous rappelant les formules (4) et (6), nous avons

$$W_i^{(n)} = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n} 2\pi\varphi_n(M),$$

$$\frac{dV^{(n)}}{dn_i} = - \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n} 2\pi\psi_n(M).$$

Donc, par la condition biorthogonale,

$$\int W_i^{(n)} \frac{dV^{(m)}}{du_i} d\sigma = 0, \quad \text{si } m \neq n.$$

Nous avons de même (pourvu que $m \neq 1$),

$$\int W_e^{(n)} \frac{dV^{(m)}}{dn_e} d\sigma = \int W_i^{(n)} \frac{dV^{(m)}}{dn_e} d\sigma = \int W_e^{(n)} \frac{dV^{(m)}}{dn_i} d\sigma = 0.$$

7. Ces résultats ont été découverts par M. Poincaré dans le *Mémoire* où il a défini les fonctions fondamentales. M. Plemelj les a rattachés à la théorie de Fredholm. M. Picard a donné des développements importants et des applications à d'autres problèmes de la Physique mathématique.

M. Poincaré démontre qu'on peut développer une fonction quelconque continue et intégrable définie sur une surface S en série uniformément convergente de fonctions fondamentales. Si nous admettons ce développement pour

$$f(M) = \sum_1^{\infty} A_n \varphi_n(M),$$

la solution de l'équation (8) sera développable aussi en série de fonctions φ ,

$$\varphi(M) = \sum_1^{\infty} B_n \varphi_n(M),$$

et B_n sera donné par

$$B_n - \frac{\lambda}{\lambda_n} B_n = A_n.$$

Donc

$$\varphi(M) = \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}} \varphi_n(M).$$

(Il faut remarquer que le *noyau* est $-\frac{\cos \varphi}{2\pi r^2}$.)

Nous aurons un développement pareil pour la solution de l'équation (10).

8. On peut remarquer enfin les cas de l'équation (10) pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

Pour $\lambda = 0$, on a

$$2\pi\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dn_e} - \frac{dV}{dn_i} \right) = f(M),$$

et la détermination de φ est immédiate. Si $f(M) = 0$, φ s'annule identiquement.

Pour $\lambda = \infty$, on a

$$\int \dot{\rho} \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dn_e} + \frac{dV}{dn_i} \right) = f_1(\mathbf{M}).$$

Or, suivant M. Poincaré, toute fonction continue est développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions fondamentales de $-\frac{1}{2\pi} \frac{\cos \psi}{r^2}$. De cela résulte d'abord que ce noyau est fermé par rapport à (σ, σ') , car, si l'on avait une fonction $g(\mathbf{M})$ telle que

$$(16) \quad \int g(\mathbf{P}) \frac{\cos \psi}{r^2} d\sigma = 0,$$

on pourrait développer $g(\mathbf{P})$ en série de fonctions fondamentales, et l'équation (16) montrerait que tous les coefficients sont nuls. Ensuite, on peut développer la fonction $f_1(\mathbf{M})$ en série de fonctions fondamentales. Donc, on peut appliquer la méthode de M. Bateman, puisque toutes les constantes caractéristiques sont réelles et qu'elles sont des pôles simples de la résolvante. La solution trouvée ainsi sera unique (voir Chap. II, § 3).

On a des résultats analogues pour les solutions de l'équation (8) pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$.

§ 2. — Problèmes relatifs à surfaces multiconnexes.

9. M. Fredholm, dans son Mémoire (1), montre comment on peut résoudre le système suivant d'équations simultanées :

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) - \lambda \sum_{k=1}^n \int_0^1 K_{1k}(s, t) \varphi_k(t) dt &= f_1(s), \\ \varphi_2(s) - \lambda \sum_{k=1}^n \int_0^1 K_{2k}(s, t) \varphi_k(t) dt &= f_2(s), \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(s) - \lambda \sum_{k=1}^n \int_0^1 K_{nk}(s, t) \varphi_k(t) dt &= f_n(s). \end{aligned}$$

(1) *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903.

M. Fredholm définit les fonctions $f(s)$, $\varphi(s)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} f(s) = f_1(s), & \varphi(s) = \varphi_1(s) & \text{dans l'intervalle } (0, 1), \\ = f_2(s - 1), & = \varphi_2(s - 1) & \text{» } (1, 2), \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ = f_n(s - n + 1), & = \varphi_n(s - n + 1) & \text{» } (n - 1, n). \end{array}$$

Il écrit

$$K(s, t) = K_{jk}(s - j + 1, t - k + 1)$$

dans l'intervalle

$$(j - 1 \leq s < j, k - 1 \leq t < k).$$

Avec ces définitions, le système de n équations se résume dans la seule équation

$$(17) \quad \varphi(s) - \lambda \int_0^n K(s, t) \varphi(t) dt = f(s).$$

Les singularités de toutes les fonctions $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_n(s)$ seront les constantes caractéristiques du noyau $K(s, t)$.

On peut réduire le système associé de la même manière et le résultat sera l'équation associée de (17).

10. M. Fredholm applique ce principe pour résoudre les problèmes de Neumann et de Dirichlet relatifs à plusieurs surfaces distinctes.

Soient

S_1, S_2 deux surfaces distinctes qui satisfont aux conditions indiquées dans le dernier article;

M_1, P_1 deux points de S_1 ;

M_2, P_2 deux points de S_2 ;

ψ_{11} l'angle que fait la normale en M_1 avec le vecteur $r_{11} = M_1 P_1$;

φ_{11} l'angle que fait la normale en P_1 avec le vecteur $r_{11} = P_1 M_1$;

ψ_{12} l'angle que fait la normale en M_1 avec le vecteur $r_{12} = M_1 P_2$;

φ_{12} l'angle que fait la normale en P_2 avec le vecteur $r_{12} = P_2 M_1$.

Les angles φ_{21} , φ_{22} , ψ_{21} , ψ_{22} sont définis de la même façon relativement aux vecteurs r_{21} , r_{22} (voir la figure 1).

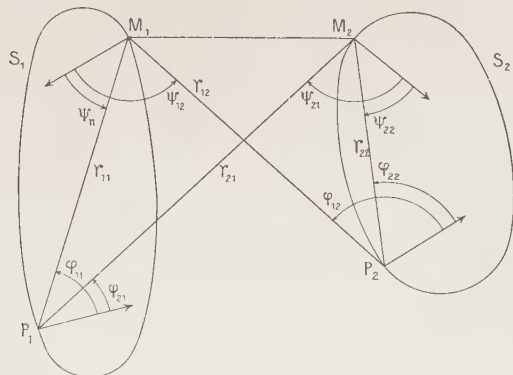
Nous nous proposons le problème suivant :

Trouver deux simples couches ρ_1 , ρ_2 étalées sur les surfaces S_1 , S_2 , qui sont telles que, à chaque point M_1 de S_1 et à chaque point M_2 de S_2 , on a la relation

$$-\frac{dV}{dn_e} + \mu \frac{dV}{dn_i} = \text{fonction donnée} = g'(M).$$

Prenons d'abord un point M_1 de S_1 . Le potentiel en M_1 se divise en

Fig. 1.



deux parties V_1 , V_2 dues respectivement aux couches sur les deux surfaces :

$$V = V_1 + V_2.$$

Pour V_1 , on a

$$\frac{dV_1}{dn_e} + \mu \frac{dV_1}{dn_i} = (1 - \mu) 2\pi \rho_1(M_1) + (1 + \mu) \int \rho_1(P_1) \frac{\cos \psi_{11}}{r_{11}^2} d\sigma_1.$$

Pour V_2 , on a

$$\frac{dV_2}{dn_e} + \mu \frac{dV_2}{dn_i} = (1 + \mu) \frac{dV_2}{dn} = (1 + \mu) \int \rho_2(P_2) \frac{\cos \psi_{12}}{r_{12}^2} d\sigma_2.$$

H.

En ajoutant, on a

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \rho_1(M_1) + \lambda \int \rho_1(P_1) \frac{\cos \psi_{11}}{r_{11}^2} d\sigma_1 \\ \quad + \lambda \int \rho_2(P_2) \frac{\cos \psi_{12}}{r_{12}^2} d\sigma_2 = \frac{g'(M_1)}{1-\mu} = g(M_1). \end{array} \right.$$

De même, on a pour un point M_2 de la surface S_2

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \rho_2(M_2) + \lambda \int \rho_1(P_1) \frac{\cos \psi_{21}}{r_{21}^2} d\sigma_1 \\ \quad + \lambda \int \rho_2(P_2) \frac{\cos \psi_{22}}{r_{22}^2} d\sigma_2 = g(M_2), \end{array} \right.$$

où l'on a toujours

$$\lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

Pour trouver les deux densités ρ_1, ρ_2 , il faut résoudre les équations simultanées (18) et (19).

Le problème associé qui consiste à trouver des densités de double couche dont les potentiels satisferont à la relation

$$W_i + \mu W_e = \text{fonction donnée} = g''(M)$$

pour tout point de S_1 et pour tout point de S_2 s'exprime par les deux équations

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \rho_1(M_1) + \lambda \int \rho_1(P_1) \frac{\cos \varphi_{11}}{r_{11}^2} d\sigma_1 \\ \quad + \lambda \int \rho_2(P_2) \frac{\cos \varphi_{12}}{r_{12}^2} d\sigma_2 = g(M_1), \end{array} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \rho_2(M_2) + \lambda \int \rho_1(P_1) \frac{\cos \varphi_{21}}{r_{21}^2} d\sigma_1 \\ \quad + \lambda \int \rho_2(P_2) \frac{\cos \varphi_{22}}{r_{22}^2} d\sigma_2 = g(M_2), \end{array} \right.$$

où

$$g(M) = \frac{1}{1-\mu} g''(M), \quad \lambda = \frac{1+\mu}{1-\mu}.$$

Considérons les fonctions suivantes des points M_1, M_2, P_1, P_2 :

$$\begin{aligned} F_{11}(M_1, P_1) &= \frac{\cos \psi_{11}}{r_{11}^2}, & F'_{11}(P_1, M_1) &= \frac{\cos \varphi_{11}}{r_{11}^2}, \\ F_{12}(M_1, P_2) &= \frac{\cos \psi_{12}}{r_{12}^2}, & F'_{12}(P_2, M_1) &= \frac{\cos \varphi_{12}}{r_{12}^2}, \\ F_{21}(M_2, P_1) &= \frac{\cos \psi_{21}}{r_{21}^2}, & F'_{21}(P_1, M_2) &= \frac{\cos \varphi_{21}}{r_{21}^2}, \\ F_{22}(M_2, P_2) &= \frac{\cos \psi_{22}}{r_{22}^2}, & F'_{22}(P_2, M_2) &= \frac{\cos \varphi_{22}}{r_{22}^2}. \end{aligned}$$

On peut regarder ces huit fonctions comme étant une seule fonction. En effet, si l'on écrit

$$F(Q, Q') = \frac{\cos \theta}{r^2},$$

où Q, Q' sont deux points qu'on peut supposer être sur S_1 ou S_2 à volonté, r est la distance QQ' , θ est l'angle que fait le vecteur QQ' avec la normale en Q , on voit de suite que $F(Q, Q')$ coïncide avec une quelconque des fonctions $F_{11}, F'_{11}, \dots$ lorsqu'on fait coïncider Q, Q' avec deux des points M_1, M_2, P_1, P_2 .

Les deux équations (18), (19) se trouvent maintenant renfermées dans la seule équation

$$(22) \quad \rho(M) + \lambda \int_{S_1 \text{ et } S_2} \rho(P) F(M, P) d\sigma = g(M),$$

où $\rho(M)$ devient ρ_1 ou ρ_2 , selon que M est sur S_1 ou sur S_2 . Les équations (20), (21) sont renfermées dans l'équation

$$(23) \quad \rho(M) + \lambda \int_{S_1 \text{ et } S_2} \rho(P) F(P, M) d\sigma = g(M).$$

On voit bien que les deux problèmes sont *associés*; on voit aussi que les problèmes relatifs à un nombre n de surfaces ne diffèrent pas des problèmes relatifs à une seule surface, lorsqu'on emploie la méthode de M. Fredholm.

11. La question de trouver une distribution d'électricité en équi-

libre sur S_1 et S_2 se réduit à la résolution de l'équation

$$(24) \quad \rho(M) - \frac{1}{2\pi} \int \rho(P) F(M, P) d\sigma = 0.$$

La Physique nous apprend que cette question a une solution et, par conséquent, $\lambda = -1$ est une constante caractéristique. La solution doit, d'ailleurs, avoir deux degrés d'indétermination, puisque nous pouvons donner à chacune des surfaces conductrices S_1 , S_2 une charge arbitraire. Il est facile de démontrer qu'il n'y a plus que deux solutions indépendantes.

Si nous avons trois solutions :

$$\begin{array}{lll} 1^o & \rho_1 = \rho'_1 & \text{sur } S_1, \quad \rho_2 = \rho'_2 \quad \text{sur } S_2, \\ 2^o & \rho_1 = \rho''_1 & \text{sur } S_1, \quad \rho_2 = \rho''_2 \quad \text{sur } S_2, \\ 3^o & \rho_1 = \rho'''_1 & \text{sur } S_1, \quad \rho_2 = \rho'''_2 \quad \text{sur } S_2, \end{array}$$

la combinaison

$$\rho_1 = \alpha \rho'_1 + \beta \rho''_1 + \gamma \rho'''_1 \quad \text{sur } S_1, \quad \rho_2 = \alpha \rho'_2 + \beta \rho''_2 + \gamma \rho'''_2 \quad \text{sur } S_2$$

serait aussi une solution.

Écrivons

$$m'_1 = \int_{S_1} \rho'_1(P) d\sigma, \quad m'_2 = \int_{S_2} \rho'_2(P) d\sigma, \quad \dots$$

Il est possible de trouver α , β , γ , de façon que nous ayons à la fois

$$\alpha m'_1 + \beta m''_1 + \gamma m'''_1 = 0, \quad \alpha m'_2 + \beta m''_2 + \gamma m'''_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int \rho_1(P) d\sigma = 0, \quad \int \rho_2(P) d\sigma = 0,$$

d'où il résulte, par des considérations pareilles à celles du dernier article, qu'on a

$$\rho_1(M) = 0, \quad \rho_2(M) = 0,$$

identiquement. Donc, les trois solutions 1°, 2°, 3° ne sont pas indépendantes.

Ce résultat se généralise pour n surfaces, et l'on voit que, dans le cas général, la première constante caractéristique $\lambda = -1$ est une racine de degré n du déterminant $D(\lambda)$.

Pour le problème associé, qui consiste à trouver des doubles couches dont le potentiel extérieur soit nul, on a l'équation

$$\rho(M) - \frac{1}{2\pi} \int \rho(P) F(P, M) d\sigma = 0;$$

les deux solutions indépendantes sont :

$$1^\circ \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = C,$$

$$2^\circ \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = C',$$

où C, C' sont deux constantes arbitraires indépendantes.

§ 3. — La théorie des marées de M. Poincaré.

12. Les astres soulèvent sur les océans des ondes qu'on peut diviser en deux catégories, celles de longue période et celles de courte période. Ce sont les ondes de longue période dont nous nous occupons; elles peuvent être considérées au point de vue *statique*, comme l'a fait Lord Kelvin⁽¹⁾. Je donne un résumé de la méthode de M. Poincaré⁽²⁾.

Soient :

V_1 le potentiel dû à la Terre;

V_2 le potentiel dû au bourrelet liquide soulevé sur les océans;

φ le potentiel dû aux astres et à la force centrifuge.

Sur la surface des océans, nous avons

$$(25) \quad V_1 + V_2 + \varphi = \text{const.} = C.$$

(1) THOMSON et TAIT, *Natural Philosophy*.

(2) H. POINCARÉ, *Journal de Mathématiques*, 1897.

Soient :

h la hauteur de la surface océanique au-dessus de la « sphère terrestre moyenne » ;

σ la densité des océans ;

ρ la densité moyenne de la Terre.

Nous considérons le bourrelet liquide comme une simple couche de densité $h\sigma$ positive ou négative étalée sur la sphère terrestre moyenne. Puisqu'il s'agit d'une sphère, le rayon se confond avec la normale, et nous avons, d'après (4), l'équation

$$(26) \quad \frac{dV_2}{dr_i} - \frac{dV_2}{dr_e} = 4\pi\rho h.$$

Or, nous pouvons développer V_2 en série de fonctions sphériques

$$V_2 = \sum X_n \quad \text{à l'intérieur de la sphère,}$$

$$V_2 = \sum X_{-n-1} \quad \text{à l'extérieur.}$$

Donc, sur la sphère, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dr_i} - \frac{dV_2}{dr_e} &= \sum n X_n - \sum (-n-1) X_{-n-1} \\ &= \sum (2n+1) X_n = 2 \frac{dV_2}{dr_i} + V_2. \end{aligned}$$

Donc

$$(27) \quad 4\pi\sigma h = 2 \frac{dV_2}{dr_i} + V_2.$$

Pour le potentiel de la Terre, nous avons

$$(28) \quad V_1 = \frac{4}{3}\pi\rho(1+h)^{-1} = \frac{4}{3}\pi\rho - \frac{4}{3}\pi\rho h,$$

à une première approximation, le rayon de la Terre étant l'unité.

En éliminant V_1 et h entre les équations (25), (27), (28), nous

avons enfin l'équation

$$(29) \quad V_2 \left(1 - \frac{\rho}{3\sigma} \right) - \frac{2\rho}{3\sigma} \frac{dV_2}{dr_i} = C - \frac{4}{3} \pi \rho - \varphi.$$

C'est l'équation à laquelle satisfait le potentiel du bourrelet sur les océans. Sur les continents où l'on a $h = 0$, il satisfait à l'équation

$$(30) \quad 2 \frac{dV_2}{dr_i} + V_2 = 0.$$

Pour tout autre point de l'espace, on a

$$(31) \quad \Delta V_2 = 0.$$

13. Le problème revient au suivant :

Trouver une fonction V qui satisfasse à l'équation

$$(32) \quad 2 \frac{dV}{dr} + V = \xi_0 \varepsilon V + \varepsilon (\Phi + k)$$

sur la surface intérieure de la sphère, et qui satisfasse à l'équation

$$\Delta V = 0,$$

pour tout autre point intérieur, où

$$\xi_0 = \frac{3\sigma}{\rho}, \quad k = -\frac{3\sigma}{\rho} \left(C - \frac{4}{3} \pi \rho \right), \quad \Phi = \frac{3\sigma}{\rho} \varphi,$$

et ε est une fonction qui égale +1 sur les océans et 0 sur les continents.

M. Poincaré remplace la constante ξ_0 par le paramètre indéterminé ξ :

$$2 \frac{dV}{dr} + V = \xi \varepsilon V + \varepsilon (\Phi + k),$$

et il obtient une valeur de V développée en série de puissances de ξ ,

$$V = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \dots + \xi^n v_n + \dots,$$

qui a un rayon fini de convergence. Les coefficients $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, \dots$ satisfont aux équations

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\nu_0}{dr} + \nu_0 &= \varepsilon(\Phi + k), & \Delta\nu_0 &= 0, \\ 2 \frac{d\nu_1}{dr} + \nu_1 &= \varepsilon\nu_0, & \Delta\nu_1 &= 0, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, \\ 2 \frac{d\nu_n}{dr} + \nu_n &= \varepsilon\nu_{n-1}, & \Delta\nu_n &= 0, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

M. Poincaré démontre ensuite qu'on peut trouver une fonction

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} V^* &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{V - \nu_0}{\xi} + \alpha_3 \frac{V - \nu_0 - \nu_1 \xi}{\xi^2} + \dots \\ &+ \alpha_q \frac{V - \nu_0 - \nu_1 \xi - \dots - \nu_{q-2} \xi^{q-2}}{\xi^{q-1}}, \end{aligned} \right.$$

qui se développe en série,

$$(34) \quad V^* = \nu_0^* + \xi \nu_1^* + \xi^2 \nu_2^* + \dots + \xi^n \nu_n^* + \dots,$$

dont le rayon de convergence devient infini avec q . Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des constantes convenablement choisies; donc V est une fonction méromorphe de ξ dans le cercle de convergence de la série (34); il en résulte que V est une fonction de ξ méromorphe dans tout le plan.

Les pôles de V sont réels, simples et positifs; le $q^{\text{ième}}$ pôle, où $q = \nu^2$, est plus grand que $2\nu - 1$,

$$\xi_q = \xi_{\nu^2} > 2\nu - 1.$$

On peut écrire

$$(35) \quad V = \sum \frac{A_i u_i}{\xi - \xi_i};$$

on n'est pas certain que cette série soit convergente, mais si l'on écrit

$$V = W + \nu_0 + \nu_1 \xi + \nu_2 \xi^2 + \nu_3 \xi^3 + \nu_4 \xi^4 + \nu_5 \xi^5,$$

on a alors la série

$$W = \sum \frac{A_i u_i \xi^5}{(\xi - \xi_i) \xi_i^5},$$

qui est uniformément convergente.

Les fonctions $u_1, u_2, u_3, \dots$ sont des fonctions fondamentales analogues aux fonctions sphériques; elles satisfont aux conditions

$$\int \varepsilon u_i u_k d\omega = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k, \\ = 1 \quad \text{pour} \quad i = k,$$

$d\omega$ étant un élément de la surface sphérique.

Si une fonction quelconque F est développable en série de fonctions $u_1, u_2, \dots, u_i,$

$$F = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \dots + B_i u_i + \dots,$$

on aura

$$B_i = \int \varepsilon u_i F d\omega.$$

14. On peut aussi traiter le problème des marées par la méthode de M. Fredholm. Rappelons les formules (4) (le rayon de la sphère est l'unité, et r est mesuré dans le sens opposé à celui de n),

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_2}{dr_e} + \frac{dV_2}{dr_i} = -4\pi\sigma h, \\ \frac{dV_2}{dr_e} + \frac{dV_2}{dr_i} = -2 \int \sigma h \frac{\cos \psi}{r^2} d\omega = - \int \frac{\sigma h}{r} d\omega = -V_2, \end{array} \right.$$

car on a

$$\frac{2 \cos \psi}{r} = 1.$$

Ensuite,

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi \rho - \frac{4}{3} \pi \rho h,$$

$$V_1 + V_2 + \varphi = C.$$

En substituant les valeurs de V_1, V_2 dans la dernière équation, nous avons

$$-\frac{4}{3} \pi \rho h + \int \frac{\sigma h}{r} d\omega = C - \varphi - \frac{4}{3} \pi \rho$$

H.

10

ou

$$h - \xi_0 \int \frac{h}{4\pi r} d\omega = \frac{1}{4\pi\sigma}(\Phi + k),$$

où nous donnons à ξ_0 , Φ , k les mêmes significations qu'avant. Aux continents on a $h = 0$. Cette équation sera valable en tout point de la sphère terrestre si nous introduisons la fonction ε :

$$(37) \quad h_M - \xi_0 \int \frac{h_P \varepsilon_M}{4\pi r} d\omega = \frac{\varepsilon_M}{4\pi\sigma}(\Phi + k).$$

Remplaçons enfin ξ_0 par un paramètre variable ξ , et nous avons

$$(38) \quad h_M - \xi \int \frac{h_P \varepsilon_M}{4\pi r} d\omega = \frac{\varepsilon_M}{4\pi\sigma}(\Phi + k).$$

Les équations (36) montrent que cette équation équivaut à

$$2 \frac{dV}{dr_i} + V = \varepsilon \xi V + \varepsilon(\Phi + k),$$

qui est l'équation de M. Poincaré.

La constante k , dans l'équation (38), est arbitraire; mais, puisque h est mesuré au-dessus de la sphère terrestre moyenne, il faut que

$$\int h d\omega = 0,$$

et cette condition détermine la valeur convenable de k .

Il faut vérifier d'abord que nous ne sommes pas dans le cas singulier. S'il en était ainsi, nous aurions une solution de (37) avec le second membre supprimé, c'est-à-dire un bourrelet liquide sans astres et sans rotation terrestre. Mais nous admettons que les astres et la rotation terrestre sont la cause unique du bourrelet; donc, nous ne sommes pas dans le cas singulier.

Nous pouvons démontrer ce fait analytiquement. Si $\xi = \xi_0$ était une constante caractéristique, il existerait une fonction harmonique V , différente de zéro, satisfaisant à l'équation

$$2 \frac{dV}{dr_i} + V = \xi_0 \varepsilon V.$$

Par la formule de Green, on a

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \\ & = + \int V \frac{dV}{dr_i} d\omega = - \int V^2 (1 - \xi_0 \varepsilon_p) d\omega. \end{aligned} \right.$$

Or on sait que

$$\xi_0 = \frac{3\sigma}{\rho} = \frac{3}{5.5}$$

à une première approximation. Donc

$$1 - \xi_0 \varepsilon_p > 0 \quad \text{pour tout point P.}$$

Donc l'équation (39) est impossible, et $\xi = \xi_0$ ne peut pas être une constante caractéristique.

On doit supposer cependant que si, dans la vie d'une planète, le rapport $\frac{\sigma}{\rho}$ devenait assez grand, de façon qu'on n'ait plus la condition

$$1 - \xi_0 \varepsilon_p > 0,$$

l'équation sans second membre pourrait avoir une solution. Les marées croîtraient sans limite et formeraient un nouveau satellite (').

13. Nous remarquons que le noyau de l'équation (38), à savoir $\frac{\varepsilon_M}{4\pi r'}$, est le produit d'une fonction symétrique de M et de P, par une fonction positive de M seule.

Donc il rentre dans la catégorie des noyaux étudiés par M. E. Schmidt, et nous pouvons dire que ses constantes caractéristiques sont réelles, et qu'elles sont des pôles simples de la résolvante. Nous pouvons le démontrer autrement en adoptant la méthode de MM. Plemelj et Picard.

1° Les constantes caractéristiques sont réelles. Supposons que nous ayons une constante caractéristique

$$\xi_1 = \alpha + i\beta.$$

(') GEORGES DARWIN, *Royal Soc. Proc.*, 1880; *Phil. Trans.*, 1881 et seq.

La solution de l'équation sans second membre

$$V = V_1 + i V_2$$

satisfait à l'équation

$$2 \frac{dV}{dr_i} + (1 - \xi_1 \varepsilon) V = 0.$$

En égalant les parties réelles et imaginaires,

$$2 \frac{dV_1}{dr_i} + (1 - \alpha \varepsilon) V_1 + \beta \varepsilon V_2 = 0,$$

$$2 \frac{dV_2}{dr_i} + (1 - \alpha \varepsilon) V_2 - \beta \varepsilon V_1 = 0.$$

On multiplie les deux équations respectivement par V_2 et V_1 , et l'on intègre par rapport à $d\omega$. En se rappelant que

$$\int V_2 \frac{dV_1}{dr_i} d\omega = \int V_1 \frac{dV_2}{dr_i} d\omega,$$

on a

$$\beta \int \varepsilon (V_1^2 + V_2^2) d\omega = 0.$$

Donc

$$\beta = 0.$$

2° Les constantes caractéristiques sont des pôles simples de la résolvante. Dans le cas contraire nous aurons des solutions des deux équations suivantes pour $\xi = \xi_1$:

$$\varphi(M) - \xi_1 \int \frac{\varphi(P) \varepsilon_M}{4\pi r} d\omega = 0,$$

$$\varphi'(M) - \xi_1 \int \frac{\varphi'(P) \varepsilon_M}{4\pi r} d\omega = - \frac{\varphi(M)}{\xi_1}.$$

Ces solutions $\varphi(M)$, $\varphi'(M)$ seront des marées dont les potentiels satisfont à

$$2 \frac{dV}{dr_i} + (1 - \xi_1 \varepsilon) V = 0,$$

$$2 \frac{dV'}{dr_i} + (1 - \xi_1 \varepsilon) V' = \frac{\varphi'(M)}{\sigma} 4\pi\sigma = \frac{dV}{dr_i} - \frac{dV}{dr_e}.$$

On multiplie la première équation par V' , et la seconde par V , et l'on intègre par rapport à $d\omega$:

$$\int V \left(\frac{dV}{dr_i} - \frac{dV}{dr_e} \right) d\omega = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int V \frac{dV}{dr_i} d\omega = \int \frac{dV}{dr_e} V d\omega.$$

Mais cette équation est impossible, puisque, par la théorie du potentiel, les deux membres ont des signes contraires, le premier membre étant négatif et le second positif.

16. Soient $u_i(M)$, $\varphi_i(P)$ la paire de fonctions fondamentales relatives à ξ_i . On voit facilement qu'on peut écrire

$$u_{iP} = \varepsilon_P \varphi_{iP}.$$

Car u_i , φ_i satisfont aux équations

$$u_{iM} - \xi_i \int \frac{\varepsilon_M}{4\pi r} u_{iP} d\omega = 0,$$

$$\varphi_{iM} - \xi_i \int \frac{\varepsilon_P}{4\pi r} \varphi_{iP} d\omega = 0.$$

Écrivons la seconde équation sous la forme

$$\varepsilon_M \varphi_{iM} - \xi_i \int \frac{\varepsilon_M}{4\pi r} \varepsilon_P \varphi_{iP} d\omega = 0.$$

On a donc

$$\varepsilon_M \varphi_{iM} = \text{const.} \times u_{iM} = u_{iM},$$

si nous unissons à u_{iM} un facteur constant convenable. Donc les fonctions u satisfont aux conditions

$$\begin{aligned} \int u_j u_k \varepsilon_P d\omega &= 1 & \text{si} & \quad j = k, \\ &= 0 & \text{si} & \quad j \neq k. \end{aligned}$$

La solution de l'équation (38) s'exprime sous la forme

$$h_M = \frac{\varepsilon_M}{4\pi\sigma} (\Phi + k) + \sum A_i u_i,$$

où

$$A_i = \frac{\xi}{\xi_i - \xi} \int \frac{\varepsilon_P}{4\pi\sigma} (\Phi_P + k) u_{iP} d\omega,$$

et nous savons que cette série est absolument et uniformément convergente.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

§ 1. — Remarques générales.

1. Dans les problèmes traités dans le dernier Chapitre, il s'agissait de trouver des solutions de l'équation

$$(1) \quad \Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

remplissant certaines conditions aux limites. M. Picard (1) donne plusieurs autres exemples, tels que le problème de l'aimantation par influence, et celui d'un corps en équilibre de température avec rayonnement.

La question de l'aimantation par influence revient à trouver une solution de (1) avec la condition

$$(1 + 4\pi k) \frac{dV}{dn_i} - \frac{dV}{dn_e} = \text{fonction donnée sur } S,$$

où S est la surface du corps magnétique, et k est le coefficient d'ai-

(1) *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1906. — *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. XXIII, 1906, et t. XXIV, 1907. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, juin, novembre, décembre 1906 et avril 1907.

mantation. L'équation de Fredholm correspondante est

$$(1') \quad \rho_M - \frac{2\pi k}{1 + 2\pi k} \int \rho_P \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} d\sigma = \Phi_M;$$

nous ne sommes pas dans le cas singulier si $k > 0$, c'est-à-dire si le corps est diamagnétique.

Pour le problème de l'équilibre de température avec rayonnement, la condition est

$$kV - \frac{dV}{dn} = \text{fonction donnée sur } S,$$

où k est une fonction positive dépendant du coefficient d'émission. L'équation de Fredholm est maintenant

$$(1'') \quad \rho_M + \int \rho_P \left(\frac{k}{2\pi r} - \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} \right) d\sigma = \Phi_M,$$

et nous ne sommes pas dans le cas singulier.

Dans le Chapitre actuel nous étudierons des questions semblables pour l'équation

$$(2) \quad \Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = f(x, y, z) V,$$

mais, avant de les aborder, nous ferons quelques remarques générales sur l'application de la méthode de Fredholm aux équations différentielles linéaires.

2. M. Hilbert ⁽¹⁾ a étudié l'équation

$$(3) \quad L(u) = p \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \frac{du}{dx} + qu = 0,$$

où p et q sont des fonctions qui ont des dérivées secondes continues, et p est positive et non nulle dans l'intervalle considéré. M. Hilbert définit une fonction $G(x, \xi)$ analogue à la fonction de Green, qui

⁽¹⁾ D. HILBERT, *Nachrichten zu Göttingen*, 1904. — Voir aussi MASON, *Mathematische Annalen*, 1904.

(pourvu qu'elle existe) aura la forme

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

et sera une solution continue de

$$L(u) = 0,$$

sauf pour $x = \xi$, où il y a une discontinuité de la dérivée première telle que

$$\lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{dg}{dx} \right]_{x=\xi+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=0} \left[\frac{dg}{dx} \right]_{x=\xi-\varepsilon} = -1.$$

En plus $g(x, \xi)$, qui est symétrique, satisfait à certaines conditions aux limites $x = a$, $x = b$. Dans ces circonstances, l'équation intégrale de la première espèce

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

où $f(x)$ est une fonction avec une dérivée seconde et qui satisfait aux conditions aux limites, aura une solution *unique*

$$\varphi(x) = -L[f(x)].$$

Donc le noyau $G(x, \xi)$ sera *fermé*, cette expression étant prise dans un sens restreint.

La résolvante $G(x, \xi, \lambda)$ du noyau $G(x, \xi)$ sera la fonction correspondant à $G(x, \xi)$ pour l'équation

$$(4) \quad \Lambda(u) = L(u) + \lambda u = 0.$$

La solution de l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x)$$

sera la solution de

$$L\varphi(x) = \lambda \varphi(x) + Lf(x),$$

qui satisfait aux conditions aux limites.

La fonction $f(x)$ qui satisfait aux conditions aux limites et qui a une dérivée seconde continue sera toujours développable en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de $G(x, \xi)$. Le dernier résultat, qui est le plus important, constitue une généralisation des développements de fonctions arbitraires en séries de fonctions trigonométriques et de fonctions analogues.

La méthode employée par M. Hilbert s'applique également aux équations aux dérivées partielles du type elliptique.

3. On peut dire en général que, si $L\varphi(x)$ représente une opération différentielle linéaire quelconque et si $G(x, \xi)$ est une fonction telle que

$$L \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x),$$

alors la fonction $\varphi(x)$, déterminée par l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

sera une solution de l'équation

$$\Lambda \varphi(x) = L\varphi(x) - \lambda \varphi(x) = f(x),$$

satisfaisant à certaines conditions aux limites, $x = a$ et $x = b$. Dans chaque cas où l'on emploie cette méthode, il faut examiner avec attention les conditions d'existence et de continuité.

4. Un cas intéressant est celui où $G(x, y)$, noyau de l'équation

$$(5) \quad \varphi(x) - \lambda \int G(x, y) \varphi(y) dy = f(y),$$

est une solution de l'équation

$$(6) \quad LV = 0,$$

qui est continue avec ses dérivées jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre, n étant l'ordre de l'équation (6). La solution de (5) sera une solution de

$$LV = Lf(x).$$

Comme exemple, nous prenons l'équation

$$(7) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + V = 0,$$

l'intervalle réel d'intégration étant $(0, 2\pi)$. Une solution de (7) est

$$G(x, y) = \sin(x + y).$$

Donc

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x + y) \varphi(y) dy = \psi(x).$$

Il est clair que

$$\varphi(x) = a \sin x + b \cos x + \psi(x).$$

Les coefficients a, b seront déterminés par

$$a = \lambda \int_0^{2\pi} \cos y [a \sin y + b \cos y + \psi(y)] dy = 0,$$

$$b = \lambda \int_0^{2\pi} \sin y [a \sin y + b \cos y + \psi(y)] dy = 0.$$

Si nous prenons $\psi(y) = y$, ces deux équations deviennent

$$a - \lambda b \pi = 0,$$

$$-\lambda a \pi + b = -2\pi \lambda,$$

d'où l'on a

$$a = \frac{-2\pi^2 \lambda^2}{1 - \lambda^2 \pi^2}, \quad b = \frac{-2\pi \lambda}{1 - \lambda^2 \pi^2}.$$

Les deux constantes caractéristiques sont $\lambda = \pm \frac{1}{\pi}$.

Nous avons donc une solution

$$\varphi(x) = x - \frac{2\pi^2 \lambda^2 \sin x + 2\pi \lambda \cos x}{1 - \pi^2 \lambda^2}$$

de l'équation

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + V = x.$$

§ 2. — Problèmes de conductibilité (I) ⁽¹⁾.

3. La température u , en un point (x, y, z) d'un corps isotrope, obéit à la loi exprimée par l'équation

$$(7) \quad C \frac{du}{dt} = K \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right] = K \Delta u,$$

où C, K sont deux fonctions positives et non nulles.

A la surface S du corps, u satisfait à une autre condition qui variera suivant les circonstances.

1° Si la température est donnée sur S on a

$$(8) \quad u_p = h_p,$$

où h_p est une fonction donnée en chaque point P sur S et qui peut dépendre du temps t .

2° Si le flux F est donné, on a

$$(9) \quad \frac{du}{dn} = F = h_p.$$

On suppose que la normale n est dirigée vers l'intérieur.

3° Si le corps est dans un milieu dont le coefficient d'émission est connu, on a

$$(10) \quad \frac{du}{dn} - ku = h_p,$$

où k est une fonction positive, qui peut s'évanouir pourvu que h_p s'évanouisse en même temps.

(1) Voir les Mémoires de M. E. Picard cités au commencement du Chapitre. — Voir aussi D. HILBERT, *Nachrichten zu Göttingen*, 1904-1905; MASON, *Mathematische Annalen*, 1904.

M. Stekloff a étudié l'application de l'équation de Fredholm et de la théorie des fonctions fondamentales aux problèmes de la Physique mathématique d'un point de vue très général. Voir les *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2^e série, t. VI, 1906. Plusieurs des formules de ce Chapitre sont dues à M. Stekloff.

Pour compléter la détermination du problème, il faut une condition initiale qui aura en général la forme

$$(11) \quad u_0 = f(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Si nous admettons qu'il existe une fonction $u(x, y, z, t)$ qui est continue pour $t > 0$ et pour chaque point (x, y, z) du corps et qui satisfait aux trois conditions précédentes pour chacun des cas 1°, 2°, 3°, il est facile de démontrer que *cette solution est unique* en s'appuyant sur l'équation de Green

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \iiint \left(\frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz} \frac{dV}{dz} \right) dx dy dz \\ & = - \int U \frac{dV}{dn} d\sigma - \iiint U \Delta V dx dy dz. \end{aligned} \right.$$

Multiplions (7) par u , et intégrons-la :

$$\iiint \frac{C}{K} u \frac{du}{dt} dx dy dz = \iiint u \Delta u dx dy dz;$$

donc

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint \frac{C}{K} u^2 dx dy dz \\ & = - \int u \frac{du}{dn} d\sigma - \iiint \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned} \right.$$

Or supposons qu'il existe deux fonctions u_1, u_2 qui soient des solutions du problème. La différence

$$u' = u_1 - u_2$$

satisfera à l'équation (7); elle satisfera aussi à l'une des conditions suivantes sur S :

$$1^\circ \quad u'_M = u_{1M} - u_{2M} = 0,$$

$$2^\circ \quad \frac{du'}{dn} = \frac{du_1}{dn} - \frac{du_2}{dn} = 0,$$

$$3^\circ \quad \frac{du'}{dn} - ku' = \left(\frac{du_1}{dn} - ku_1 \right) - \left(\frac{du_2}{dn} - ku_2 \right) = 0,$$

et à la condition initiale

$$u'_0 = u_{10} - u_{20} = 0.$$

Substituons u' dans (13); pour les cas 1° et 2° nous avons

$$\int u' \frac{du'}{dn} d\sigma = 0;$$

pour le cas ~~2°~~ 3° nous avons

$$\int u' \frac{du'}{dn} d\sigma = \int k u'^2 d\sigma.$$

Donc dans tous les cas nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint \frac{C}{K} u'^2 dx dy dz = -F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction positive ou nulle.

En intégrant, on a

$$\frac{1}{2} \iiint \frac{C}{K} u'^2 dx dy dz = -\int_0^t F(t) dt + A.$$

La constante A est égale à zéro, comme nous le voyons, en faisant $t = 0$. Par conséquent, le second membre de cette équation est essentiellement négatif ou nul; donc il faut que

$$\iiint \frac{C}{K} u'^2 dx dy dz = 0,$$

c'est-à-dire que

$$u' = u_1 - u_2 = 0$$

pour toute valeur de x, y, z, t .

Nous avons ainsi établi que la solution est unique dans tous les cas que nous étudions; mais il faut remarquer que la méthode qui sera employée établira d'elle-même l'existence d'une solution analytique unique.

6. Prenons maintenant le problème avec la condition

$$1^{\circ} \text{ bis} \quad u = 0 \quad \text{sur } S.$$

Soit

$$(14) \quad u = v e^{-\lambda t}$$

une solution de (7), où v est une fonction de x, y, z seulement. On a

$$(15) \quad -\lambda C v = K \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = K \Delta v.$$

La fonction u sera une solution convenable pour la condition envisagée, si l'on peut trouver une fonction v vérifiant (15) et en même temps la condition

$$v = 0 \quad \text{sur } S.$$

Nous allons voir que les valeurs de λ pour lesquelles il est possible de trouver une fonction v sont les constantes caractéristiques d'une équation de Fredholm ⁽¹⁾.

Soit $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ la fonction de Green relative à la surface S . G est symétrique, c'est-à-dire qu'on a

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z).$$

Elle est positive et continue, sauf pour $\xi = x, \eta = y, \zeta = z$, où elle devient infinie de la même façon que $\frac{1}{r}$. Elle s'annule sur le bord; elle satisfait à l'équation

$$\Delta G = \frac{d^2 G}{dx^2} + \frac{d^2 G}{dy^2} + \frac{d^2 G}{dz^2} = 0,$$

sauf au point $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$.

On peut démontrer qu'on a

$$(16) \quad \Delta \int G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) dx dy dz = -4\pi f(x, y, z)$$

pour toute fonction continue $f(x, y, z)$.

(1) Voir E. PICARD, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1906.

On voit tout de suite que la fonction cherchée ν est la solution de l'équation

$$\nu(x, y, z) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \nu(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

C'est une équation dont le noyau

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \chi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

est le produit d'une fonction symétrique par une fonction positive; χ devient infini de la même façon que $\frac{1}{r}$. D'après ce qui a été fait dans le Chapitre II, on voit que les constantes caractéristiques sont réelles et qu'elles sont des pôles simples de la résolvante. De plus, l'équation (16) démontre que le noyau est *fermé* et, par conséquent, que le nombre de constantes caractéristiques est infini. On peut développer en série absolument et uniformément convergente de fonctions fondamentales de χ toute fonction $h(x, y, z)$ qui s'évanouit sur S, et qui a des dérivées secondes continues. Rappelons qu'on peut développer de cette manière toute fonction de la forme

$$h_1(x, y, z) = \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

où $g(\xi, \eta, \zeta)$ est une fonction continue.

Ecrivons

$$h'(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \Delta h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

On a

$$\Delta h' = \Delta h, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta(h' - h) = 0.$$

Donc la fonction $h' - h$ est une fonction harmonique, continue, qui s'évanouit sur S, c'est-à-dire que $h' - h$ est identiquement nul. Par conséquent,

$$\begin{aligned} h &= h' = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\ &\quad \times \frac{K(\xi, \eta, \zeta)}{C(\xi, \eta, \zeta)} \Delta h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

de sorte que $h(x, y, z)$ a la forme nécessaire.

7. Remarquons maintenant que *toutes les constantes caractéristiques sont positives*. L'équation de Green nous donne

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= - \int v \frac{dv}{dn} d\sigma - \int \int \int v \Delta v dx dy dz; \end{aligned}$$

donc

$$\int \int \int \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz = \lambda \int \int \int \frac{C}{K} v^2 dx dy dz.$$

Les deux intégrales étant positives, il faut que λ soit positif aussi. La fonction fondamentale associée de v , qui est une solution de

$$\begin{aligned} & \omega(x, y, z) \\ & - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} \int \int \int G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \omega(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0, \end{aligned}$$

sera

$$\omega(x, y, z) = v(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)}.$$

On a donc

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \int \int \omega_i(x, y, z) v_i(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int \int \int \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} v_i^2(x, y, z) dx dy dz = 1, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \int \int \omega_i(x, y, z) v_l(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int \int \int \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} v_i(x, y, z) v_l(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (l \neq i). \end{aligned} \right.$$

On peut démontrer la seconde équation directement, en considérant les deux équations

$$- \lambda_i \frac{C}{K} v_i = \Delta v_i,$$

$$- \lambda_l \frac{C}{K} v_l = \Delta v_l.$$

On en tire

$$(\lambda_l - \lambda_i) \int \int \int \frac{C}{K} v_i v_l dx dy dz = \int \int \int (v_i \Delta v_l - v_l \Delta v_i) dx dy dz \\ = - \int \left(v_i \frac{dv_l}{dn} - v_l \frac{dv_i}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

Puisque $\lambda_l \neq \lambda_i$, nous avons tout de suite l'équation (17).

8. Nous avons maintenant la solution du problème. La fonction initiale $f(x, y, z)$, qu'on suppose avoir des dérivées secondes continues et qui s'évanouit sur le bord, se développe en série de fonctions fondamentales,

$$(18) \quad \begin{cases} f(x, y, z) = \alpha_1 v_1(x, y, z) + \alpha_2 v_2(x, y, z) + \dots \\ \quad \quad \quad + \alpha_i v_i(x, y, z) + \dots, \end{cases}$$

où

$$\alpha_i = \int \int \int f(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} v_i(x, y, z) dx dy dz.$$

Il est clair que la solution est

$$u(x, y, z, t) = \alpha_1 v_1(x, y, z) e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 v_2(x, y, z) e^{-\lambda_2 t} + \dots \\ + \alpha_i v_i(x, y, z) e^{-\lambda_i t} + \dots$$

Cette série est absolument et uniformément convergente; elle satisfait à l'équation (7); elle s'annule sur S, et pour $t = 0$ elle se réduit à $f(x, y, z)$.

Pour des valeurs assez grandes de t , la série tend vers son premier terme

$$\alpha_1 v_1(x, y, z) e^{-\lambda_1 t}.$$

9. Il est important de démontrer qu'à la première constante caractéristique correspond une seule paire de fonctions fondamentales, et que par conséquent la température tend vers une distribution indépendante de l'état initial (pourvu que cet état ne soit pas tel que $\alpha_1 = 0$).

Nous démontrons d'abord qu'il y a une fonction fondamentale u_1 , correspondant à λ_1 , qui ne s'annule que sur la surface. Envisageons

une distribution de température U dans le corps, qui est continue et positive, s'annulant sur la surface seulement. Soit M un point du corps où $U = U_0$ est plus petit qu'aux points voisins; décrivons autour de M une très petite surface s ; à chaque point de s nous aurons

$$\frac{dU}{dn} \leq 0;$$

le signe d'égalité s'applique, au plus, à quelques-uns des points de s . Or

$$\int \int \int_s \frac{dU}{dt} \frac{C}{K} dx dy dz = \int \int \int_s \Delta U dx dy dz = - \int_s \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

Écrivons

$$U = U_0 + \varepsilon,$$

où ε sera une petite quantité du premier ordre par rapport à $\frac{dU}{dn}$.

L'intégrale

$$\int \int \int_s \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{C}{K} d\omega = \nu$$

sera du second ordre de petitesse par rapport à

$$\int_s \frac{dU}{dn} d\sigma.$$

Donc on a

$$\frac{dU_0}{dt} \int_s \frac{C}{K} d\omega = - \int_s \frac{dU}{dn} d\sigma + \nu.$$

Il en résulte que $\frac{dU_0}{dt}$ est positif, c'est-à-dire qu'au point M , U est croissant. La température ne peut pas descendre au-dessous de celle de tous les points voisins, et elle ne peut pas s'annuler.

Nous avons vu que la température résultant d'un état initial $f(x, y, z)$ était donnée par

$$u = \alpha_1 u_1 e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 u_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots$$

et qu'après un certain temps u se réduisait à son premier terme :

$$u = \alpha_1 u_1 e^{-\lambda_1 t}.$$

Si nous supposons que $f(x, y, z)$ est positif partout, s'annulant seulement sur la surface, u ne s'annulera jamais. Par conséquent, u_i ne s'annule que sur la surface.

Donc, il y a une fonction fondamentale relative à λ_i qui ne s'annule que sur la surface. Toutes les autres fonctions fondamentales auront des parties positives et des parties négatives, à cause des relations

$$\int \int \int_{\bar{K}} u_i u_i dx dy dz = 0.$$

10. Nous citons maintenant, sous une forme légèrement modifiée, la méthode de M. Picard (1) pour démontrer que la fonction u_i est unique. Supposons qu'il y ait une fonction fondamentale u'_i relative à λ_i indépendante de u_i ; u'_i aura des parties positives et des parties négatives. Ces parties seront complètement entourées par des surfaces où u'_i s'annule, à cause de la continuité.

Écrivons

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{K(\xi, \eta, \zeta)}{G(\xi, \eta, \zeta)} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \chi(M, P),$$

où M, P sont respectivement les points $(x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)$.

Pour la résolvante, nous avons la série

$$\begin{aligned} \chi(M, P, \lambda) = \chi_1(M, P) + \lambda \chi_2(M, P) + \lambda^2 \chi_3(M, P) + \dots \\ + \lambda^{i-1} \chi_i(M, P) + \dots, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \chi_i(M, P) &= \int \chi(M, Q) \chi_{i-1}(Q, P) d\omega_Q, \\ \chi_1(M, P) &= \chi(M, P), \end{aligned}$$

$d\omega_Q$ étant un élément de volume.

La fonction $\chi_i(M, P)$ devient infinie de la même façon que $\frac{1}{r}$ pour $M = P$, mais toutes les autres fonctions $\chi_i(M, P)$ restent finies, continues et positives; elles s'annulent sur la surface seulement.

En nous reportant au Chapitre II, § 1, nous voyons que, pour toutes

(1) *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1906.

les positions de M, P qui ne sont pas sur la surface, la suite

$$(19) \quad \chi_1(M, P), \sqrt[2]{\chi_2(M, P)}, \sqrt[3]{\chi_3(M, P)}, \dots, \sqrt[i]{\chi_i(M, P)}, \dots$$

aura une limite supérieure égale à $\frac{1}{\lambda_i}$, lorsque i croît indéfiniment.

Envisageons maintenant une surface S' renfermée dans S , mais qui peut coïncider avec S dans une partie de son étendue, et deux points M', P' à l'intérieur de S' . On aura

$$G'(M', P') < G(M', P'),$$

où G' est la fonction de Green relative à S' . Donc

$$\begin{aligned} \chi'(M', P') &< \chi(M', P'), \\ \chi'_2(M', P') &< c\chi_2(M', P'), \\ &\dots\dots\dots, \\ \chi'_i(M', P') &< c^{i-1}\chi_i(M', P'), \end{aligned}$$

où c est une quantité positive plus petite que l'unité.

Il en résulte que la limite supérieure de la suite

$$\chi'_1(M', P'), \sqrt[2]{\chi'_2(M', P')}, \sqrt[3]{\chi'_3(M', P')}, \dots, \sqrt[i]{\chi'_i(M', P')}, \dots$$

sera plus petite que celle de la suite (19). Donc

$$\frac{1}{\lambda'_i} < \frac{1}{\lambda_i}, \quad \lambda'_i > \lambda_i,$$

où λ'_i est la première constante caractéristique relative à la surface S' .

Maintenant, nous avons vu que u'_i doit avoir des parties positives et des parties négatives. Prenons pour S' une région de S où u'_i est positive. Donc u'_i est une fonction positive, continue, s'annulant sur S' et satisfaisant à l'équation

$$-\lambda_i u'_i \frac{Q}{K} = \frac{d^2 u'_i}{dx^2} + \frac{d^2 u'_i}{dy^2} + \frac{d^2 u'_i}{dz^2};$$

mais ceci est impossible, puisque la première constante caractéristique relative à S' est plus grande que λ_i .

Donc, nous avons démontré qu'il y a une seule fonction fondamentale relative à λ_1 , et celle-ci est positive pour tout point à l'intérieur de S .

11. Nous résolvons sans difficulté le problème avec la condition aux limites

$$1^{\circ} \quad u_p = h_p \text{ sur } S.$$

D'après le Chapitre III, § 1, nous pouvons toujours déterminer une fonction harmonique φ qui prend les valeurs données h_p sur la surface S , et cette fonction φ est unique.

Écrivons

$$u = v + \varphi.$$

Alors, à cause des relations

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \Delta\varphi = 0,$$

on voit que v satisfait aux équations suivantes :

$$\frac{C}{K} \frac{dv}{dt} = \Delta v,$$

$$v = 0 \quad \text{sur la surface,}$$

$$v = f(x, y, z) - \varphi(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0.$$

Donc v est complètement déterminée par l'analyse précédente, et le problème est résolu.

§ 3. — Les problèmes de conductibilité (II).

12. Nous passons maintenant à la considération du problème avec les conditions limites 2° et 3° . Considérons d'abord le cas

$$3^{\circ} \text{ bis} \quad \frac{du}{dn} - ku = 0,$$

où k est une fonction continue positive ou nulle.

Pour traiter ce problème par une théorie analogue à celle du § 2, il faudra avoir une fonction $\Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ analogue à la fonction de Green, qui satisfait à la condition

$$(20) \quad \frac{d\Gamma}{dn} - k\Gamma = 0 \quad \text{sur la surface.}$$

Nous commençons par la détermination de cette fonction.

Prenons un point fixe $P(\xi, \eta, \zeta)$ à l'intérieur de S ; soit r la distance entre P et un point quelconque $M(x, y, z)$. L'expression

$$(21) \quad \frac{d}{dn} \frac{1}{r} - k \frac{1}{r} = \Phi(M)$$

est une fonction finie et continue sur la surface. Nous pourrions donc trouver une fonction harmonique G' , telle que

$$(22) \quad \frac{dG'}{dn} - kG' = \Phi(M) \quad \text{sur la surface,}$$

en nous servant de la méthode de Fredholm. L'équation est celle trouvée par M. Picard pour le problème d'équilibre de température avec rayonnement,

$$(23) \quad \rho_M + \int \rho_Q \left[\frac{k}{2\pi r} - \frac{\cos\psi}{2\pi r^2} \right] d\sigma = \Phi(M)$$

(voir § 1), et nous avons dit que nous ne sommes pas dans le cas singulier. Ce fait est facile à démontrer. Soit V une fonction harmonique satisfaisant à la condition limite

$$\frac{dV}{dn} - kV = 0;$$

on aura

$$\begin{aligned} \iiint \left[\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz &= - \int V \frac{dV}{dn} d\sigma \\ &= - \int k V^2 d\sigma, \end{aligned}$$

d'où l'on voit que V est identiquement nulle. Donc ρ est uniquement

déterminée; c'est une fonction finie et continue sur la surface. La fonction G' est donnée par

$$(24) \quad G' = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\rho(Q)}{r} d\sigma_Q,$$

où r est la distance entre le point Q de la surface et le point M . Donc G' est une fonction harmonique bien déterminée tant que le point (ξ, η, ζ) n'est pas sur la surface. De la manière dont G' a été déterminée il est évident qu'elle est symétrique en M et P , car, si nous supposons que M est un point fixe et que P est variable, nous serons conduits à des équations analogues en P . Donc G' est finie et continue pourvu que M et P ne soient pas sur la surface *à la fois*. C'est ce cas exceptionnel que nous devons étudier maintenant.

13. Dans le cas où P se trouve sur la surface, $\Phi(M)$ devient infinie lorsque M s'approche de P . Si nous désignons par ψ l'angle que fait la normale PN en P avec le vecteur PM , nous aurons

$$\Phi(M) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} - k \frac{1}{r} = \frac{\cos \psi}{r^2} - k \frac{1}{r}.$$

Lorsque M tend vers P , $\Phi(M)$ tend vers l'infini de la même façon que

$$\frac{1}{r} \left(\frac{1}{2R} - k \right),$$

où R désigne une quantité qui se trouve entre les longueurs des rayons de courbure principaux. De même le noyau tendra vers l'infini de la même façon que

$$\frac{1}{r} \times (\text{quantité finie})$$

lorsque Q tend vers M . Par conséquent, la résolvante de (23) tendra vers l'infini de la même manière lorsque Q tend vers M . Or, nous avons

$$(25) \quad \rho_M = \Phi(M, P) - \int K(M, Q) \Phi(Q, P) d\sigma_Q,$$

où $K(M, Q)$ est la résolvante de (23). Donc, ρ_M reste fini tant que M ne coïncide pas avec P .

Lorsque M tend vers P , le premier terme du second membre tendra vers l'infini de la même façon que

$$\frac{1}{MP} \times (\text{quantité finie}).$$

Considérons l'intégrale

$$\int_{S_p} K(P, Q) \Phi(Q, P) d\sigma = \int_{S_p} \frac{\theta(P, Q)}{PQ^2} d\sigma,$$

où le champ d'intégration est une petite partie de la surface autour de P , le point P non compris et $\theta(P, Q)$ est une fonction finie et continue. Considérons une projection de S_p sur le plan tangent; si nous appliquons l'intégration à cette projection nous ferons une erreur relativement négligeable. Prenons pour $d\sigma$ la zone située entre deux cercles sur le plan tangent, de rayons r' et $r' + dr'$, qui ont pour centre le point P . Notre intégrale sera comparable à

$$\int_{r'_0}^{r'_1} \frac{2\pi r' dr'}{r'^2} = 2\pi \log \frac{r'_1}{r'_0}.$$

Donc, le second terme du second membre de (25) tendra vers l'infini proportionnellement à $\log MP$.

En résumé, la densité de la simple couche déterminée par l'équation (23) sera d'une infinité du même ordre que $\frac{1}{MP}$, lorsque M tend vers P ; elle sera continue aux autres points de la surface.

La fonction

$$G(M, P) = \int \frac{\rho(Q)}{r} d\sigma,$$

où P est un point de la surface, sera finie et continue, même lorsque M est aussi sur la surface, sauf peut-être lorsque M coïncide avec P . Considérons ce cas exceptionnel, et séparons de l'intégrale la partie qui s'applique à une petite aire S_p de la surface autour de P . Cette partie sera comparable à

$$\int_{S_p} \frac{d\sigma}{MQ \cdot QP}$$

où M peut être à l'intérieur ou sur la surface. Si nous faisons coïncider M avec P , et si nous poursuivons le calcul de la même manière que précédemment, nous trouvons que $G(M, P)$ tend vers l'infini d'une manière comparable à celle avec laquelle $\log MP$ tend vers l'infini.

14. Écrivons maintenant

$$(26) \quad \Gamma(M, P) = \frac{1}{r} - G'(M, P);$$

Γ est la fonction que nous avons cherchée. Elle a les propriétés suivantes :

Lorsque M tend vers P , elle devient infinie de la même manière que $\frac{1}{MP}$ si P est à l'intérieur de S , mais de la même manière que

$$\frac{1}{MP} + \theta \log MP,$$

où θ est fini, si P est sur S . Elle est ailleurs finie et continue.

Elle est symétrique en M, P .

Elle satisfait à l'équation

$$\Delta u = 0$$

en tout point où elle est continue.

Si P est fixe, M étant variable, on aura

$$(27) \quad \frac{d\Gamma}{dn} - k\Gamma = 0 \quad \text{sur la surface,}$$

sauf dans le cas où P se trouve sur la surface et que M coïncide avec P . Dans ce cas, si M tend vers P en partant d'un point intérieur, l'expression

$$\frac{d\Gamma}{dn} - k\Gamma$$

tendra vers l'infini de la même manière que $\frac{1}{r^2}$.

Il est facile de voir qu'on a toujours

$$(28) \quad \Delta \int \int \int \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = - \frac{1}{4\pi} f(x, y, z)$$

II. 13

pour une fonction continue $f(x, y, z)$, car

$$\Delta \int \int \int \frac{1}{r} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = -\frac{1}{4\pi} f(x, y, z),$$

$$\Delta \int \int \int G'(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0;$$

pour tous les points M à l'intérieur de S ceci est évident, et il est facile de le démontrer pour les points sur S .

15. Nous aurons maintenant la solution de notre problème, car les solutions de l'équation

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} v(x, y, z) - \frac{\lambda}{4\pi} \int \int \int \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} \\ \times \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) v(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0 \end{aligned} \right.$$

seront les solutions de

$$-\lambda C v = K \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right)$$

qui satisfont à la condition

$$\frac{dv}{dn} - kv = 0 \quad \text{sur } S.$$

Le noyau de cette équation (29) est le produit d'une fonction symétrique par une fonction positive; il est fermé à cause de (28).

Nous pouvons développer, en série uniformément convergente des fonctions fondamentales de ce noyau, toute fonction qui s'exprime sous la forme

$$(30) \quad h_1(x, y, z) = \int \int \int \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

Écrivons, comme au § 2, n° 6,

$$h'(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \Delta h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta.$$

On a

$$\begin{aligned} \Delta h' &= \Delta h, \\ \Delta(h' - h) &= 0. \end{aligned}$$

Donc, la fonction $h'' = h' - h$ est une fonction harmonique telle que

$$\frac{dh''}{dn} - kh'' = 0 \quad \text{sur la surface,}$$

pourvu qu'on ait

$$(31) \quad \frac{dh}{dn} - kh = 0.$$

Donc, ~~h~~ $- h'$ est nulle identiquement, d'après le n° 12; et l'on a

$$\begin{aligned} h(x, y, z) = h'(x, y, z) = & -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} \\ & \times \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \frac{K(\xi, \eta, \zeta)}{C(\xi, \eta, \zeta)} \Delta h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Par conséquent, toute fonction continue de (x, y, z) qui satisfait à la condition (31) sur la surface est développable en série uniformément convergente des fonctions fondamentales du noyau.

Comme dans le dernier article nous démontrons que la fonction fondamentale associée à v' est

$$\omega'(x, y, z) = v'(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)}.$$

Et nous avons les relations

$$\begin{aligned} \iiint \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} v'_i(x, y, z) v'_l(x, y, z) dx dy dz &= 1 & \text{si} & \quad i = l, \\ &= 0 & \text{si} & \quad i \neq l. \end{aligned}$$

En développant la fonction initiale en série nous avons

$$f(x, y, z) = \alpha_1 v'_1(x, y, z) + \alpha_2 v'_2(x, y, z) + \dots + \alpha_i v'_i(x, y, z) + \dots$$

Et la solution du problème est

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \alpha_1 v'_1(x, y, z) e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 v'_2(x, y, z) e^{-\lambda_2 t} + \dots \\ & + \alpha_i v'_i(x, y, z) e^{-\lambda_i t} + \dots \end{aligned}$$

Il est facile de démontrer que les constantes caractéristiques sont toujours positives, de sorte que u tend vers le premier terme de la

série; en effet, si v' est une fonction fondamentale, nous aurons

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{dv'}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv'}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dv'}{dz} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= - \int v' \frac{dv'}{dn} d\sigma - \iiint v' \Delta v' dx dy dz \\ &= - \int v'^2 k d\sigma + \lambda \iiint \frac{C}{K} v'^2 dx dy dz. \end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que λ est positive.

16. Nous pouvons démontrer que dans ce cas aussi il y a une fonction fondamentale relative à la première constante caractéristique, qui est essentiellement positive. Ceci dépend du fait déjà démontré que u est croissant en un point où u atteint un minimum. Donc, étant donnée une fonction initiale f partout positive, u ne peut pas descendre au-dessous de la plus petite valeur de f à l'intérieur de S sans avoir d'abord atteint une plus petite valeur sur la surface. De plus, u ne peut pas s'annuler à l'intérieur de S sans que u se soit déjà annulée sur S . Supposons donc que u ait atteint sur S au point P une valeur minimum qui soit plus grande que zéro. Traçons une petite sphère autour de P , et considérons la petite surface s composée de la partie s_2 de la sphère à l'intérieur de S et de la partie s_1 de S découpée par la sphère. La dérivée normale $\frac{du}{dn}$ sera négative sur la partie sphérique de s . Appliquons maintenant à s l'équation du n° 9, § 2 :

$$\frac{dU_0}{dt} \iiint \frac{C}{K} dx dy dz = - \int \frac{dU}{dn} d\sigma + v = - \int_{s_1} k u d\sigma - \int_{s_2} \frac{dU}{dn} d\sigma + v.$$

La première intégrale du second membre est positive; la seconde est négative; v est une petite quantité du second ordre. Donc il est évident que u ne peut pas tendre vers zéro sans que $\frac{dU_0}{dt}$ devienne positive, et alors u sera croissante. Donc u ne devient jamais négative ou nulle.

Le reste de la démonstration est pareil à celle du n° 9, et nous avons établi qu'il y a une fonction fondamentale essentiellement positive relative à la première constante caractéristique. Les autres fonctions fondamentales auront des parties positives et des parties négatives.

Il est facile maintenant de démontrer qu'il y a une seule fonction fondamentale relative à λ_1 . Dans le cas contraire nous aurions deux fonctions distinctes satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \varphi \frac{C}{K} &= \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2}, \\ -\lambda_1 \varphi' \frac{C}{K} &= \frac{d^2 \varphi'}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi'}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi'}{dz^2}. \end{aligned}$$

Nous multiplions la première équation par $\frac{\varphi'^2}{\varphi}$ et la seconde par φ' , φ étant la fonction fondamentale essentiellement positive. En retranchant et en intégrant, on a

$$\iiint \left(\frac{\varphi'^2}{\varphi} \Delta \varphi - \varphi' \Delta \varphi' \right) dx dy dz = 0.$$

Donc, par la formule de Green,

$$\begin{aligned} \iiint \Sigma \left[\frac{d}{dx} \frac{\varphi'^2}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{d\varphi'}{dx} \right)^2 \right] dx dy dz &= - \int \left(\frac{\varphi'^2}{\varphi} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi' \frac{d\varphi'}{dn} \right) d\sigma \\ &= - \int \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\varphi' \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\varphi'}{dn} \right) d\sigma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\varphi'^2}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{d\varphi'}{dx} \right)^2 &= - \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi'}{dx} - \left(\frac{d\varphi'}{dx} \right)^2 \\ &= - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi'}{dx} \right)^2 = - \varphi^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\iiint \varphi^2 \Sigma \left[\frac{d}{dx} \frac{\varphi'}{\varphi} \right]^2 dx dy dz = 0,$$

et pour satisfaire à cette dernière équation il faut que

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \text{const.}$$

17. Il est facile maintenant de résoudre le problème pour la condi-

tion

$$\frac{du}{dn} - ku = h_p \quad \text{sur } S,$$

où h_p est une fonction continue sur la surface. Nous commençons par trouver une fonction harmonique φ qui est telle que

$$\frac{d\varphi}{dn} - k\varphi = h_p \quad \text{sur } S,$$

et puis nous écrivons

$$u = u' + \varphi.$$

La fonction u' sera déterminée par les conditions

$$\frac{C}{K} \frac{du'}{dt} = \Delta u',$$

$$\frac{du'}{dn} - ku' = 0 \quad \text{sur le bord},$$

$$u'_0 = f(x, y, z) - \varphi_0(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0.$$

18. La résolution du problème, avec la condition

$$2^\circ \text{ bis} \quad \frac{du}{dn} = 0,$$

nous présente quelques difficultés. Si nous cherchons une fonction harmonique V qui satisfait à la condition limite

$$\frac{dV}{dn} = \Phi(M),$$

nous sommes conduit à l'équation

$$(32) \quad \rho(M) - \int \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} \rho(Q) d\sigma_Q = -\frac{1}{2\pi} \Phi(M).$$

Mais nous sommes dans le cas singulier (*voir* Chap. III, § 1); l'équation (32) sans second membre a pour solution la densité d'une couche d'électricité en équilibre, qui donne

$$V = \text{const.}$$

L'équation associée sans second membre a pour solution

$$\varphi = \text{const.} = C_1.$$

Donc l'équation (32) a une solution seulement dans le cas où

$$\frac{1}{2\pi} \int C_1 \Phi(\mathbf{M}) d\sigma_{\mathbf{M}} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(33) \quad \int \Phi(\mathbf{M}) d\sigma_{\mathbf{M}} = 0.$$

Considérons deux points $P(\xi, \eta, \zeta)$, $M(x, y, z)$ dont P est à l'intérieur de S ; prenons $r = PM$. Si M est sur la surface nous aurons

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{r} = \frac{\cos \chi}{r^2} = \Phi_1(\mathbf{M}),$$

où χ est l'angle que fait MP avec la normale en M . On a

$$\int \Phi_1(\mathbf{M}) d\sigma_{\mathbf{M}} = 4\pi.$$

Si nous écrivons

$$\Phi(\mathbf{M}) = \Phi_1(\mathbf{M}) - \frac{4\pi}{S},$$

la fonction $\Phi(\mathbf{M})$ satisfera à la condition (33), et l'équation (32) aura une solution $\varphi(\mathbf{M})$ qui conduira à une fonction harmonique

$$G_1(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = \int \frac{\varphi(\mathbf{Q})}{MQ} d\sigma_{\mathbf{Q}}.$$

A cette solution $\varphi(\mathbf{M})$ nous pouvons ajouter une couche d'électricité en équilibre, c'est-à-dire que nous pouvons ajouter une constante arbitraire à $G_1(\mathbf{M}, \mathbf{P})$. Ajoutons une constante C telle que

$$(34) \quad \iiint \left[\frac{1}{r} - G(\mathbf{M}, \mathbf{P}) \right] \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} dx dy dz = 0,$$

où

$$G(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = G_1(\mathbf{M}, \mathbf{P}) + C(\mathbf{P}).$$

Envisageons maintenant la fonction

$$\Gamma(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = -\mathbf{G}(\mathbf{M}, \mathbf{P}) + \frac{1}{r}.$$

Elle est finie et continue, sauf pour $\mathbf{M} = \mathbf{P}$, où elle devient infinie de la même manière que $\frac{1}{r}$.

Elle est symétrique en $\mathbf{M}, \mathbf{P}$.

Elle satisfait à l'équation

$$\Delta_{\mathbf{M}} \Gamma(\mathbf{M}, \mathbf{P}) = 0,$$

sauf pour le cas où $\mathbf{M}$ coïncide avec $\mathbf{P}$.

Elle satisfait à la condition

$$(35) \quad \frac{d\Gamma'}{dn} = \frac{4\pi}{S} \quad \text{sur } S.$$

19. Construisons l'équation de Fredholm

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} v(x, y, z) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} \\ \quad \times \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) v(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0, \end{array} \right.$$

λ étant une constante caractéristique.

Nous aurons, à cause de (34),

$$\iiint \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} v(x, y, z) dx dy dz = 0$$

et, à cause de (35),

$$\frac{dv}{dn} = \lambda \frac{4\pi}{S} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} v(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

Donc les fonctions fondamentales de (36)

$$v_1, \quad v_2, \quad \dots, \quad v_i, \quad \dots$$

seront des solutions de l'équation

$$-\lambda \frac{C}{K} v = \Delta v,$$

qui satisfont à la condition 2° *bis*.

Si nous écrivons

$$h'(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \Delta_{\xi\eta\zeta} h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

où h est une fonction continue avec dérivées secondes continues, satisfaisant aux relations

$$\frac{dh}{dn} = 0, \quad \int \int \int h(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} dx dy dz = 0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta(h' - h) &= 0, \\ \frac{dh'}{dn} &= -\frac{1}{S} \int \int \int \Delta_{\xi\eta\zeta} h(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta, \\ &= +\frac{1}{S} \int \frac{dh}{dn} d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dn}(h' - h) = 0$$

et, par conséquent,

$$h' - h = C'.$$

On a aussi

$$\int \int \int h'(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} dy dz = 0.$$

Donc

$$C' = 0, \quad h = h'.$$

Et nous voyons que toute fonction continue $h(x, y, z)$ qui satisfait aux conditions

$$\frac{dh}{dn} = 0, \quad \int \int \int h(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} dx dy dz = 0,$$

et qui a des dérivées secondes continues, sera développable en série de fonctions fondamentales de (36).

20. Nous avons maintenant la solution de notre problème. La fonction initiale $f(x, y, z)$ se développe en série de fonctions fonamen-

tales

$$f(x, y, z) = \frac{F}{S} + \alpha_1 v_1(x, y, z) + \alpha_2 v_2(x, y, z) + \dots + \alpha_i v_i(x, y, z) + \dots,$$

où

$$F = \iiint f(x, y, z) \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} dx dy dz.$$

Donc la solution est

$$u(x, y, z, t) = \frac{F}{S} + \alpha_1 v_1(x, y, z) e^{-\lambda_1 t} + \alpha_2 v_2(x, y, z) e^{-\lambda_2 t} + \dots + \alpha_i v_i(x, y, z) e^{-\lambda_i t} + \dots$$

On démontre comme auparavant que les constantes caractéristiques sont toutes positives.

21. Nous pouvons déduire la solution du problème avec la condition

$$(37) \quad \frac{du}{dn} = \Phi.$$

Écrivons

$$\int \Phi d\sigma = C.$$

Il s'agit de trouver une solution de

$$(38) \quad \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} \frac{du}{dt} = \Delta u,$$

qui pour $t = 0$ se réduit à la fonction initiale $f(x, y, z)$, pour laquelle on a

$$\frac{df}{dn} = \Phi,$$

sur la surface.

Considérons la fonction

$$V(x, y, z) = \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

où r est la distance entre les points (ξ, η, ζ) , (x, y, z) .

On a

$$\begin{aligned}\Delta V &= -4\pi \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)}, \\ \int \frac{dV}{dn} d\sigma &= \int d\sigma \int \int \int \frac{\cos \psi}{r^2} \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta \\ &= +4\pi \int \int \int \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta = +C'.\end{aligned}$$

Donc la fonction

$$(39) \quad U_0 = + \frac{C}{C'} (-4\pi t + V)$$

est une solution de (38) telle que

$$(40) \quad \int \frac{dU_0}{dn} d\sigma = C.$$

Construisons ensuite une fonction harmonique U_1 , telle qu'on ait

$$\frac{dU_1}{dn} = \Phi - \frac{C}{C'} \frac{dV}{dn}.$$

Il est possible de le faire par la méthode déjà exposée, puisqu'on a

$$\int \frac{dU_1}{dn} d\sigma = C - C = 0.$$

La fonction U_1 ne sera déterminée qu'à une constante arbitraire près; mais ce fait n'a pas d'importance.

Écrivons, enfin, la solution sous la forme

$$u = U_0 + U_1 + u'.$$

La fonction u' sera une solution de (38) qui pour $t = 0$ se réduit à la fonction

$$u'_0 = f(x, y, z) - \frac{C}{C'} V - U_1,$$

et qui, sur la surface, satisfait à la condition

$$\frac{du'}{dn} = \Phi - \frac{dU_0}{dn} - \frac{dU_1}{dn} = 0.$$

La fonction initiale satisfait aussi à la condition

$$\frac{du'_0}{dn} = 0.$$

Donc il est possible de déterminer u' par la méthode précédente, et u est complètement connue.

§ 4. — Application à l'équation $\Delta u = -\lambda \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} u$ ⁽¹⁾.

20. Les fonctions G et Γ dont nous nous sommes servi dans le dernier paragraphe nous permettent également de trouver les solutions de l'équation

$$(41) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = -\lambda \frac{C(x, y, z)}{K(x, y, z)} u,$$

pour les conditions à la surface

$$(42) \quad u = h_1(\sigma),$$

$$(43) \quad \frac{du}{dn} - ku = h_2(\sigma),$$

$$(44) \quad \frac{du}{dn} = h_3(\sigma).$$

La solution pour la première condition est donnée par l'équation

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{\lambda}{4\pi} \iiint G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\ &\times \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} u(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = g_1(x, y, z), \end{aligned} \right.$$

où $g_1(x, y, z)$ est la fonction harmonique qui prend la valeur $h_1(\sigma)$ sur la surface. La solution existera et sera unique sauf pour les valeurs singulières de λ , qui sont positives.

(1) Voir les Mémoires de M. E. Picard cités au commencement du Chapitre et aussi son Mémoire *Sur le problème de Dirichlet* (*Acta mathematica*, t. XXV, 1902). — LINDBERG, *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. XVIII, 1901.

La solution pour la seconde condition est donnée, de même, par l'équation

$$u(x, y, z) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\ \times \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} u(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = g_2(x, y, z),$$

où $g_2(x, y, z)$ est la fonction harmonique qui satisfait à la condition (43) à la surface.

La solution pour la troisième condition est un peu plus compliquée. Écrivons

$$\int h_3(\sigma) d\sigma = C_1, \\ u_2 = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{C_1}{r} d\xi d\eta d\zeta.$$

On a

$$\int \frac{du_2}{dn} d\sigma = C_1,$$

sur la surface.

Construisons, enfin, une fonction harmonique g_3 telle qu'on ait sur la surface

$$\frac{dg_3}{dn} = h_3(\sigma) - \frac{du_2}{dn}.$$

Ceci est possible puisqu'on a

$$\int \frac{dg_3}{dn} d\sigma = C_1 - C_1 = 0.$$

A $g_3(x, y, z)$ nous pouvons ajouter une constante arbitraire C_2 .

Écrivons la solution du problème sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + g_3.$$

La fonction u_1 sera la solution de

$$u_1(x, y, z) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} u_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\ = - \frac{1}{4\pi} \iiint \Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \\ \times \left\{ C_1 - \lambda \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} [u_2(\xi, \eta, \zeta) + g_3(\xi, \eta, \zeta)] \right\} d\xi d\eta d\zeta,$$

où la constante C_2 est choisie de façon que

$$\iiint \left\{ C_1 - \lambda \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} [u_2(\xi, \eta, \zeta) + g_3(\xi, \eta, \zeta)] \right\} d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

A la solution ainsi obtenue nous pouvons ajouter une constante arbitraire.

21. La méthode que nous avons employée est celle de M. Picard; il l'a employée pour la première condition et pour l'équation elliptique en général. Pour les deux autres conditions (43) et (44) il a procédé d'une manière différente ⁽¹⁾. A titre d'exemple prenons la condition

$$\frac{du}{dn} = h_3(\sigma).$$

Posons

$$(46) \quad \begin{cases} u(x, y, z) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} \\ \times u(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos \psi}{r^2} d\xi d\eta d\zeta = v(x, y, z). \end{cases}$$

La fonction $v(x, y, z)$ sera harmonique et satisfera à la condition sur la surface

$$(47) \quad \frac{dv}{dn} = h_3(\sigma) - \frac{\lambda}{4\pi} \iiint \frac{C(\xi, \eta, \zeta)}{K(\xi, \eta, \zeta)} u(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos \psi}{r^2} d\xi d\eta d\zeta.$$

De l'équation (46) on tire

$$u(x, y, z) = v(x, y, z) - \lambda \iiint \chi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) v(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,$$

où χ est la résolvante. En substituant cette expression à la place de u dans (47), on a

$$(48) \quad \frac{dv}{dn} + \iiint Q(\sigma; \xi, \eta, \zeta; \lambda) v(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = h_3(\sigma).$$

Or, v étant une fonction harmonique, on peut écrire

$$v = \int \hat{v}(\sigma) \frac{d\sigma}{r},$$

⁽¹⁾ *Annales de l'Ecole Normale*, 3^e série, t. XXIV, 1907. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 26 novembre et 24 décembre 1906.

où ρ sera la densité d'une simple couche, et la substitution de cette expression dans (48) nous donnera l'équation suivante pour ρ :

$$\rho(M) + \int \rho(P) R(M, P, \lambda) d\sigma = \frac{1}{2\pi} h_3(\sigma).$$

Donc le problème est résolu, sauf pour certaines valeurs exceptionnelles de λ .

22. Remarquons que nous aurons une solution de l'équation

$$\Delta(u) = -\lambda \frac{G(x, y, z)}{K(x, y, z)} u(x, y, z) + f(x, y, z),$$

pour la condition (42), en introduisant le terme

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

au second membre de (45). Nous aurons de la même façon les solutions pour les conditions (43) et (44).

23. Les méthodes de ce Chapitre sont applicables au cas où le coefficient de u ou de $\frac{du}{dt}$ est une fonction qui peut être positive et négative, mais les constantes caractéristiques ne seront plus, en général, des pôles simples de la résolvante et nous ne pouvons plus établir la convergence des séries de fonctions fondamentales.

Vu et approuvé :

Paris, le 1^{er} mai 1908.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 1^{er} mai 1908.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Sur quelques intégrales donnant le nombre de racines communes à plusieurs équations.

Vu et approuvé :

Paris, le 1^{er} mai 1908.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 1^{er} mai 1908.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

41584

Quai des Grands-Augustins, 55.
